变量代换法在常微分方程中的应用分析

宋艳红
（郑州理工职业学院　河南　郑州　451150）

[摘　要]本文从变量代换法在常微分方程中的应用出发，分类归纳总结了变量代换法在几种常见类型的常微分方程中的应用，以此来体现变量代换法在求解微分方程时的优越性，同时列举一些实例来加以阐述.

[关键词]常微分方程；变量代换法；通解；特解
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.04.2357

引言

不论在社会和自然科学研究领域，还是社会和科学研究领域，都普遍存在着大量的问题，需要我们进行解决.因此，解决这类问题的途径和方法很多，通常在这种情况下，先通过合理的假设，抓住了问题的主要矛盾，将实际的问题进行数学化，从而尽可能地利用传统的数学手段进行解决.因此，数学问题自身也不是无一例外，变量代换法就是解决数学问题经常采用的有效方法之一.其基本思想是通过变量代换，化繁为简，化难为易，实现从未知向已知转化，从而达到解决问题的目的.所谓变量代换法就是指引入一个或几个新的变量来代替原式中的某些变量，从而使得原式中只包含有这些新的变量，然后对这些新的变量进行求出结果，通过反复的回代来求出原始变量的结果.

变量代换法不管是在初等数学研究领域或者是高等数学研究领域都已经有着广泛的研究和应用，文献[1]主要给出了这种代替法的思想在初等数学研究领域的一些部分实际应用，文献[2，3]主要给出了这种代替法的思想在高等数学研究领域的一些部分实际应用.这种代替法的思想在常微分方程中也已经有着很好的充分体现，文献[4]主要讲述了如何正确运用它。我们想要求解齐次及准齐次线性方程，同时又给出非齐次线性方程解法.[4]讲述了如何运用这种思想求解齐次及准齐次方程，同时给出了非齐次线性方程的解法.文献[9]提出了一些运用代换思维来求解高阶微分方程的方法.本文将通过大量的例子说明该方法在常微分方程中的具体应用.通过该方法的学习与运用，不仅学到了必要的知识，更加深了学习者对数学思想的理解，从而培养发现问题，解决问题的能力，最终达到创新的目的.[9]给出了运用代换思想求解一些高阶微分方程的解法.本文将通过大量的例子说明该方法在常微分方程中的具体应用.通过该方法的学习与运用，不仅学到了必要的知识，更加深了学习者对数学思想的理解，从而培养发现问题，解决问题的能力，最终达到创新的目的.

1 变量代换法于一阶微分方程中的应用

1.1 变量代换法在齐次及准齐次微分方程中的应用

1.1.1 对于一个齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$，这里$g(u)$表示为$u$的连续函数.用变量代换$u=\frac{y}{x}$，使方程转化为一个变量分离方程$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$，即可求方程的解.

例1．1求解方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

解：这就是一个齐次微分方程，以$\frac{y}{x}=u$和$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$进行代入，则原方程形式可以变为：

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u$$

即 $\frac{du}{dx}=\frac{\tan u}{x}$

将上式分离变量，则有：$\cot u du=\frac{dx}{x}$

两边积分，得到：$\ln|\sin u|=\ln|x|+\tilde{c}$

即 $\sin u=\pm e^{\tilde{c}}x$

令$c=\pm e^{\tilde{c}}$，得到：$\sin u=cx$

代回原变量，得：$\sin\frac{y}{x}=cx$

显然$y=0$也是方程的解.

所以，方程的通解为$\sin\frac{y}{x}=cx$（c为任意常数）.

1.1.2 对于准齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$，这里$a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2$均为常数.

⑴ 当$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$（常数）时，方程直接化为$\frac{dy}{dx}=k$，有通解$y=kx+c$（$c$为常数）；

⑵ 当$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\neq\frac{c_1}{c_2}$时，作变量变换$u=a_2x+b_2y$，将方程化为变量分离方程$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{ku+c_1}{u+c_2}$（k为常数），即可求解.

⑶ 当$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$时，作变量代换$\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases}$，其中$(\alpha,\beta)$为直线$a_1x+b_1y+c_1=0$和$a_2x+b_2y+c_2=0$在$xoy$平面的交点，将原方程转化成为齐次微分方程$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\frac{Y}{X}\right)$，即可求解.

例1.2 求解准齐次微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y+4}{4x+6y+8}$

解：原方程可变形为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$$

分离变量，并积分得：

$y=\frac{1}{2}x+c$（c为任意常数）.

例1.3 作适当的变量代换求解准齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+5}{x-y-2}$

解：令$u=x-y$，即$x=u+y$，则原方程可变形为：

$$\frac{du}{dx}=\frac{-7}{u-2}$$

分离变量，并积分得：

$u^2-4u+14x=c$（c为任意常数）

将 $u=x-y$ 代入原方程，可得原方程通解为：

$(x-y)^2-4(x-y)+14x=c$

化简，得：

$x^2+y^2-2xy+10x+4y=c$ （c为任意常数）

例1.4 作适当的变量变换求解准齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

解：解二元一次方程组 $\begin{cases}2x-y+1=0\\ x-2y+1=0\end{cases}$ 得：

$x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}.$

作变量代换

$$\begin{cases}x=X-\frac{1}{3}\\ y=Y+\frac{1}{3}\end{cases}$$

代入原方程，则有：

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$$

再令 $u=\frac{Y}{X}$，即 $Y=uX$，则上式可化为

$$\frac{(1-2u)du}{2(1-u+u^2)}=\frac{dX}{X}$$

对上式两边同时积分，得

$\ln(u^2-u+1)+\ln X^2=c$

即

$\ln(Y^2-XY+X^2)=c$

所以原方程的解为

$$\ln[(y-\frac{1}{3})^2-(x+\frac{1}{3})(y-\frac{1}{3})+(x+\frac{1}{3})^2]=c_1$$

化简，得

$x^2+y^2-xy+x-y=c$

这里 $c=e^{c_1}-\frac{1}{3}, c_1$ 是任意常数.

1.2 变量代换法在非齐次微分方程中的应用

1.2.1 非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$，若 $Q(x)=0$，则该方程变为一阶齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$，通解为 $y=ce^{\int P(x)dx}$；若 $Q(x)\neq 0$，对原方程作变量代换 $y=c(x)e^{\int P(x)dx}$，则可以求得待定函数为 $c(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c$，代入回原变换，即可求得方程的通解.

例1.5 求解非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x}y=e^x x^n$（$n$ 为常数）

解：令

$P(x)=\frac{n}{x}$，$Q(x)=e^x x^n$

所以

$$y=e^{\int\frac{n}{x}dx}(\int e^x x^n e^{\int(-\frac{n}{x})dx}dx+c)$$

$$=x^n(\int e^x x^n x^{-n}dx+c)$$

$$=(e^x+c)x^n$$

1.2.2 对于Bernoulli方程，这里 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 为连续变量函数（$n\neq 0,1$ 为常数），当 $y\neq 0$ 时用 y^{-n} 乘以原来的方程，两边即可得到 $y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x)$，作变量代换 $z=y^{1-n}$，则可使原来的方程化为线性微分方程 $\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$，即可求方程的解.

例1.6求解方程 $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

解：当 $n=3$ 时，方程为伯努力微分方程，令 $z=y^{-2}$，可得：

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

代入原方程，得：

$$\frac{dz}{dx}=2xz-2x^3$$

此方程为线性微分方程，可求得它的通解为：

$z=ce^{x^2}+x^2+1$

代回原变量 y，可得：

$$\frac{1}{y^2}=ce^{x^2}+x^2+1$$

或

$cy^2e^{x^2}+y^2(x^2+1)=1$

此外，方程还有解 $y=0$.

1.2.3 当函数R（x）恒为零时，Riccati方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ 就是Bernoulli方程，可以直接采用1.2.2中的方法求解；当R（x）≠0时，设 $y(x)$ 为Riccati方程的一个特解，作变量代换 $z=y-y(x)$,使Riccati方程转化成一个关于 z 的Bernoulli方程，即可求方程的解.

例1.7 求解一阶微分方程 $x\frac{dy}{dx}-(2x+1)y+y^2=-x^2$

解：形如方程 $y_1(x)=ax+b$ 的特解为 $y_1(x)$. 把它代入方程，得出关于 x 的恒等式

$$ax-(2x+1)(ax+b)+(ax+b)^2\equiv -x^2$$

由此得 $2ab-2b=0, a=1, -b+b^2=0$. 最后这个方程组可能有两组解：

$a=1$，$b=1$ 或 $a=1, b=0$

设 $a=1, b=0$，则 $y_1(x)=x$ 是特解. 作变量代换 $z=y-x$，可得线性方程

$$x(1+\frac{dz}{dx})-(2x+1)(x+z)+(x+z)^2=-x^2$$

即

$$\frac{dz}{-z^2+z}=\frac{dx}{x}$$

对它求积分，可得

$$\frac{z}{(1-z)x}=\pm e^{c_1}$$

代回原来变量，得：

$$\frac{y-x}{(1-y+x)x}=\pm e^{c_1}$$

即

$$y=x+\frac{x}{x+C}$$

其中$C=\pm\frac{1}{e^{c_1}}$，c_1为任意实数.

1.3 其他形式的一阶微分方程

对于其他形式的某些一阶微分方程，可以依照方程本身的性质和特征，适当地选取灵活的替代方法，将其转换成可分离的变量方程，如方程$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$（a,b,c均为常数）. 作变量代换$u=ax+by+c$，将方程转化成为变量分离方程$\frac{du}{dx}=a+bf(u)$，即可求方程的解.

例1.8 求解一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=(y+2x-3)^2$

解：令$u=y+2x-3$，则原方程可变形为变量分离方程

$$\frac{du}{dx}=u^2+2$$

对上式两边积分，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}=x+c$$

代回原变量，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{(y+2x-3)}{\sqrt{2}}=x+c$$

即

$$y+2x-3=\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}(x+c))$$

对于方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy+R(x,y)(xdy-ydx)=0$，其中$M,N$是$m$次齐次函数，R是n次齐次函数，首先用代换$y=ux(u)$化为伯努力方程，然后运用已经熟知的方法化成线性方程.

例1.9 求解一阶微分方程$ydx+xdy+y^2(xdy-ydx)=0$

解：这是一个明金-达布方程，因为函数$M(x,y)=y$和$N(x,y)=x$都是齐次的，次数为1，函数$R(x,y)=y^2$是齐次的，次数为2. 因此作变量代换$y=ux(u)$，则有

$$uxdx+x(udx+xdu)+u^2x^2[x(udx+xdu)-uxdx]=0$$

即

$$2udx+x(1+x^2u^2)du=0, x=0.$$

将所得方程的两边除以du，则方程即为伯努力方程

$$2u\frac{dx}{du}+x=-u^2x^3$$

设$x^{-2}=z$，得出线性微分方程

$$uz'-z=u^2$$

容易检验出它的通解可表示为$z=u^2+Cu$. 依次代回原来的变量，最后得

$$y^2+Cxy-1=0$$

当$C=\infty$时，当然，这里也包含解$x=0, y=0$.

2 变量代换法在高阶微分方程中的应用

在我们求解某些类型的高阶微分方程时，可以通过变量代换法将原高阶方程转化为较低阶的微分方程，进而可快速实现它的求解.

2.1 形如$F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$的高阶微分方程

若能从中解出$y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$. 令$y^{(n-1)}=z$，则可得$z'=f(z)$. 分离变量，若解出$z=\psi(x,c_1)$, 则可得$y^{(n-1)}=\psi(x,c_1)$，再对方程进行$n-1$次积分可求得方程的通解. 如果不能解出$y^{(n)}$，则可通过变量代换引进参数t，将$y^{(n)}$及$y^{(n-1)}$都写成关于t的函数，即

$$y^{(n-1)}=g(t)$$

$$y^{(n)}=\psi(t)$$

然后由关系式$dx=\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$，即可求出方程的参数形式通解.

例2.1 求解高阶微分方程$y'''^2+y''^2-1=0$

解：设$y''=z(x)$，则　$z'^2+z^2-1=0$

在所得的方程中分离变量，得

$$\frac{dz}{\pm\sqrt{1-z^2}}=dx$$

对上式求积分，可得

$$z=\pm\sin(x+C_1)$$

即

$$y''=\pm\sin(x+C_1)$$

对最后这个方程两次求积分，可得

$$(y-C_2x+C_3)^2=\sin^2(x+C_1)$$

另外，还有一个显式解

$$y=\pm\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5.$$

例2.2 求解高阶微分方程$y''(1+y')e^{y'}=1$

解：令

$$y'=t,\quad y''=\frac{e^{-t}}{1+t}$$

由关系式$dy'=y''dx$，可得

$$(1+t)dt=e^{-t}dx$$

因此

$$x=te^t+C_1$$

从方程$y'=t$可求出

$$y=\int tdx+C_2$$
$$=\int t(1+t)e^tdt+C_2$$
$$=(t^2-t+1)e^t+C_2$$

从而可求出方程的通解为

$$x=te^t+C_1,\quad y=(t^2-t+1)e^t+C_2.$$

2.2 形如$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$的高阶微分方程

如果高阶微分方程具有形式

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$$

则可利用变量代换$y^{(k)}=z(x)$降低它的阶数. 这时可得方程为

$$F(x,z,z',\cdots,z^{(n-k)})=0$$

显然，此方程比原方程降低了k阶.

例2.3求解高阶微分方程$x^2y''=y'^2$

解：设$y'=z(x)$，可得一阶微分方程

$$x^2z'=z^2$$

对此分离变量并求积分，得

$$\int\frac{dz}{z^2}=\int\frac{dx}{x^2}+C_1$$

即

$$z=\frac{x}{1-C_1x}=y'$$

再次求积分，最后可得

$$y=\int\frac{xdx}{1-C_1x}+C_2$$

$$
= \begin{cases} -\frac{1}{C_1}x-\frac{1}{C_1^2}\ln|C_1x-1|+C_2,(& C_1\neq 0, C_1\neq\infty \\ \frac{x^2}{2}+C_2,)(& C_1=0 \\ C_2,)(& C_1=\infty \end{cases}
$$

2.3 形如$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$的高阶微分方程

作变量代换$y'=f(y)$（y为自变量），则可将方程转化为关于新的未知函数$f(y)$的$n-1$阶方程，从而可求原方程的解，尤其是二阶方程$F(y,y',y'')=0$，通过以上变量代换转化为一阶方程，求解一阶方程即可.

例2.4 求解高阶微分方程$y(xy''+y')=xy'^2(1-x)$

解：设$y'=yz(x)$，可得

$$(xz)'+(xz)^2=0$$

从而

$$\frac{(xz)'}{(xz)^2}=-1$$

对此求积分，可得

$$\frac{1}{xz}=x+C_1$$

由此得到

$$z=\frac{1}{x(x+C_1)}$$

即

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x(x+C_1)}$$

对其求积分，最后可得

$$y=C_2\left|\frac{x}{x+C_1}\right|^{\frac{1}{C_1}}.$$

3 结束语

由于数学知识在不断更新，科学领域在不断进步，常微分方程这一学科也在不断完善，因此对我们这些学者或研究者的要求也在不断提高。本文便是在已有的一些常微分方程知识的基础上进行的论述，讨论方法和步骤，总结出一般低阶微分方程和高阶微分方程的解法。因此，在求解一些微分方程时，可根据方程自身的特点，仔细分析，灵活运用，通过采用适当的变量代换法使方程转化为容易求解的类型。由于常微分方程的内容很多，因此本文只是对常微分方程进行了简单初步的讨论。

参考文献

[1]亢红道，罗开秀.中学数学解题对策[M].昆明：云南大学出版社，2003：106.

[2]何彩香，张媛祥.换元思想在解高数题中的应用[J].大理学院学报，2004（3）：87-88.

[3]邵铭心.谈可换元方程[J].数学通报，2001（6）.

[4]王高雄、周之铭等.常微分方程[M]，北京：高等教育出版社，2006（第三版）.

[5]周尚仁，权宏顺.常微分方程习题集[M]，北京：人民教育出版社，1980.

[6]张庚尧.关于常微分方程中的数学思想[J]，零陵师范学院学报，1998.

[7]黄雪燕.常微分方程的转化思想[J]，长春师范学院学报，2007.

[8]王庆东，侯海军等.常微分方程的数学思想方法[J]，商丘师范学院学报，2003.

[9]高等数学例题与习题集[M].清华大学出版社.2005

（上接第2403页）

案》，深入开展民族团结进步创建、“民族团结一家亲”和民族团结联谊活动、民族团结宣传教育工作。积极开展民族团结进步示范评选，引导开展民族团结示范“好家庭”“好邻居”等创建微行动，结合典型促进铸牢中华民族共同体意识。

五、丰富夜校及冬季攻势班的学习内容。培训内容不但包括国家政策，国家通用语言文字及农业技术技能，还包括中华优秀传统文化宣传教育。着力提高村民文化水平，增强中华民族共同体意识，营造中华民族一家亲的社会氛围，有力促进文化润疆，完整准确贯彻新时代党的治疆方略。

结语

农村思想政治教育工作的质量直接影响到新时代农村的发展，然而当前农村思想政治教育工作中普遍存在思想重视程度不购高和教育工作内容方式单一等问题。新时代农村思想政治教育工作必须改进现有的不足，为社会的发展培养社会主义新型农民，早日实现社会主义现代化强国的目标。

参考文献

[1]蔡志红，宋亚霖.新时代背景下农村思想政治工作的战略定位于发展路径[J].山西经济管理干部学院学报，2018（9）：48.

[2]张学凤.新农村建设和农民思想政治教育关系探析[J].长春大学报，2014（1）：100-103.