如何判断两个法向量指向相同还是相反？

徐晓阳

（黑龙江省大庆市第四中学　黑龙江　大庆　163711）

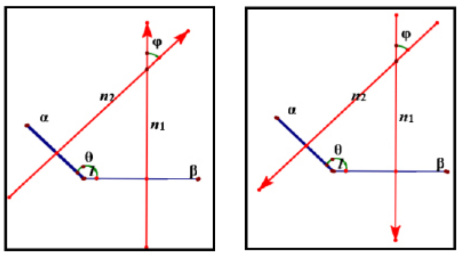
[摘　要]随着高中新课改的全面推进，立体几何中的二面角问题一直是高考的热点，成为解答题中的必出题目。而向量法是解决该问题常用的方法。该方法简单实用，便于掌握。用法向量解答二面角问题时，学生常困惑于二面角大小与其半平面法向量的夹角的关系是相等还是互补，即难以准确判断法向量的方向。本篇文章从多个视角为为学生解答这个困惑。

[关键词]立体几何；二面角；法向量

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.04.1892

一．两法向量的夹角与二面角的关系如下图：

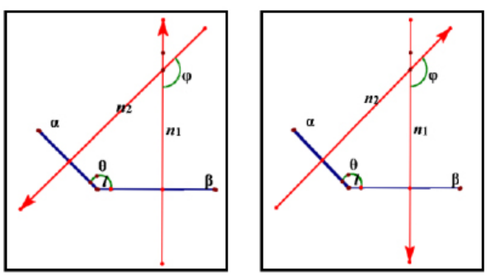
（一）



由上图观察得到：当两个法向量的方向指向相同时，两个法向量的夹角和二面角是互补的关系。

即：$\theta=\pi-\varphi$

（二）



由上图观察得到：当两个法向量的方向指向相反时，两个法向量的夹角和二面角是相等的关系。

即：$\theta=\varphi$

二．如何判断两个法向量指向相同还是相反？

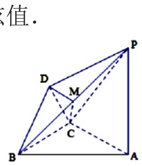
定义：已知二面角$\alpha-l-\beta$，向量$\overrightarrow{n_1}$是半平面α的法向量，向量$\overrightarrow{n_2}$是半平面β的法向量。分别在半平面α，β内各取一点B，A（不在棱上取），向量$\overrightarrow{BA}$（与法向量不共线）。当向量$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA}>0$且$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BA}<0$（或$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA}<0$且$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BA}>0$）此时称法向量$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$指向相同；当$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA}>0$且$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BA}>0$（或$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA}<0$且$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BA}<0$）此时称法向量$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$指向相反。

三．方法应用

例1如图，几何体PDBAC中，$PA\perp$平面ABC，ΔABC为正三角形，ΔBDC为等腰直角三角形，$\angle BDC$为直角，平面BDC平面$\perp$平面ABC，$PA=AC=2$，M为PB的中点．

（1）求证：DM∥平面ABC；

（2）求二面角的余弦值．



解答：（1）取AB的中点为E，BC的中点为F，连接ME,DF,EF，则ΔPAB中，$ME//PA$且$ME=\frac{1}{2}AP$又ΔBDC为等腰直角三角形，$\angle BDC$为直角，故$DF\perp BC,DF=\frac{1}{2}BC$。

因为，平面$BDC\perp$平面ABC，交线为BC，DF⊂平面BDC所以，DF⊥平面ABC

又因为PA⊥平面ABC，所以$DF//PA,PA=AC$ ΔABC为正三角形得$PA=BC$所以$DF\perp PA,DF=\frac{1}{2}PA$所以，$ME//DF,ME=DF$，

即四边形MEFD为平行四边形。所以，$DM//EF$

$\because DM\not\subset$平面ABC，$EF\subset$平面ABC

$\therefore DM//$平面ABC.

（2）以BC的中点为坐标原点，OB,OA,OD方向为x,y,z轴建立空间直角坐标系，根据建立坐标系的情况解得如下点的坐标

$B(1,0,0),C(-1,0,0),D(0,0,1),M(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$

易得平面BDC的法向量$\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$

设平面BDM的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n_2}=-x+z=0\\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n_2}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$$

$$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

以下判断法向量指向

法一：根据法一定义在棱上取一点我们可以取点C则向量$\overrightarrow{DC}=(-1,0,-1)$则$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{n_2}>0$；$\overrightarrow{DM}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$则$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{n_1}>0$

说明两个半平面的法向量指向相同，则法向量的夹角与二面角互补。

所以，二面角$C-BD-M$的余弦值为$-\frac{\sqrt{7}}{7}$

法二：根据法二定义分别在半平面α，β内各取一点B，A（不在棱上取），做向量$\overrightarrow{BA}$那么本题可取向量$\overrightarrow{CM}$

则$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{n_1}>0,\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{n_2}<0$

说明两个半平面的法向量指向相同，则法向量的夹角与二面角互补

所以，二面角$C-BD-M$的余弦值为$-\frac{\sqrt{7}}{7}$

综上，这两种判断方法只是增加了判断向量，这样可以减少学生在解题时，用图形判断的失误导致结果相反，从而在考试中失分的情况发生。以上的两种判断方法都是用数来解决形的问题。从而减少了对空间图形判断的压力，对于那些空间想象能力不好的同学，不失是一个很好的方法。并且此种方法并没有给学生增加额外的计算量。

在教材中或者是其他的教辅资料中，在最后的结果判断是，都是粗略的说从图形看或者从图形得。导致学生在实际的做题中很难判断结果或者出现错误，导致失分。高考对于每一个学生来说每一分都很重要。

利用以上的结论使得2018年大庆市一模考试题中的第18题得到了很好的解决，此方法便于掌握，减少了学生在考试结果上丢分的现象。

参考文献：

[1]方妍.数学建模式教学模式[J].考试周刊,2020(A4):63-64.