二次函数求解最值常用方法

袁翠霞
（郑州铁路技师学院　河南　郑州　450041）

[摘　要]在初等数学教学当中，二次函数属于重要内容，而最值问题是二次函数非常重要的一种题型，主要考查学生对二次函数有关知识的灵活运用能力。基于此，本文旨在对二次函数当中最值问题的求解方法进行探究，希望能为实际教学提供些许参考。

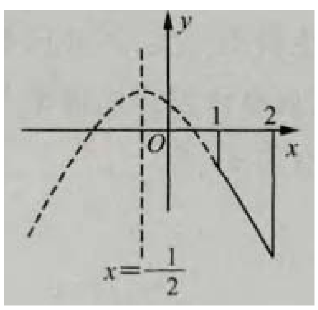
[关键词]二次函数；最值问题；求解方法
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.04.320

在初等数学当中，函数属于核心内容，函数概念与函数思想早在数学知识各个领域当中有了一定渗透，同时变成人们对数学知识进行学习的重要工具。二次函数最值问题是数学考试的重要内容，通常以综合题的形式进行呈现。为此，强化学生对二次函数最值问题常用的几种解法的理解掌握，这样有助于提升其解题效率。

一、定区间定曲线

二次函数具有的对称轴以及定义域都是确定的，此种情况便是定区间以及定曲线。

例如，求二次函数$f(x)=-x^2-x+1$在区间$[1,2]$上的最小值与最大值。



分析：函数图像的开口是向下的，对称轴在区间$[1,2]$的左侧，所以函数在区间$[1,2]$上式单调递减的，所以在该区间两端取得最值。

解：$f(x)=-x^2-x+1=-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$，在区间$[1,2]$上该函数为减函数，因此当$x=1$时，$f(x)_{\max}=-1$，当$x=2$时，$f(x)_{\min}=-5$.

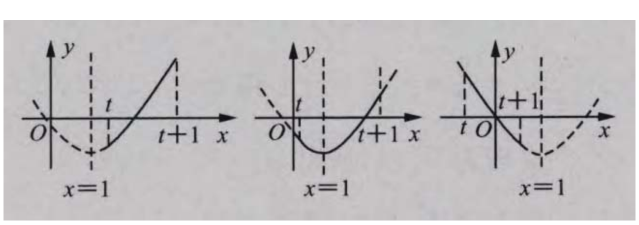
二、动区间定曲线

二次函数对称轴是确定的，然而定义域是随参数不断变化的，此种情况就是动区间、定曲线。

例如，求函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}$在区间$[t,t+1]$之上的最小值（$t$是常数）.

分析，函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}$对称轴是$x=1$，这是保持不变的，$x$取值范围会伴随参数$t$变化，所以只需对比对称轴和区间相对位置，便可确定区间$[t,t+1]$之上函数具有的单调性，进而最值取点处。

解：函数$y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$，图像的开口向上，且对称轴是$x=1$，由于$t\le x\le t+1$，所以，



（1）当$t>1$时，当$x=t$时，$y_{\min}=\frac{1}{2}t^2-t-\frac{5}{2}$；

（2）当$t\le 1\le t+1$，即$0\le t\le 1$时，当$x=1$时，$y_{\min}=\frac{1}{2}\times 1-1-\frac{5}{2}=-3$；

（3）当$t+1<1$，即$t<0$时，当$x=t+1$时，$y_{\min}=\frac{1}{2}(t+1)^2-(t+1)-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}t^2-3$

（从左至右分别对应上述（1）（2）（3））

综上可知，$y_{\min}=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2-3 & t<0,\\ -3 & 0\le t\le 1,\\ \frac{1}{2}t^2-t-\frac{5}{2} & t>1.\end{cases}$

三、定区间动曲线

例如，已知函数$y=-x^2+ax-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}$在区间$[-1,1]$上最大值是2，求$a$值.

分析：函数$y=-x^2+ax-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}$对称轴是$x=\frac{a}{2}$，所以对称轴会随$a$值变化发生变化，但区间是固定不变的，所以只需对区间和对称轴间的相对位置加以讨论即可。

解：$y=-x^2+ax-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{1}{4}(a^2-a+2)$，对称轴是$x=\frac{a}{2}$，图像开口向下。

（1）当$\frac{a}{2}>1$即$a>2$时，因为函数在区间$[-1,1]$上是单调递增的，所以，当$x=1$时，$y_{\max}=-1+a-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}=2$，进而得到$a=\frac{10}{3}$.

（2）当$-1\le\frac{a}{2}\le 1$即$-2\le a\le 2$时，因为函数在区间$[-1,\frac{a}{2}]$上是单调递增的，在$[\frac{a}{2},1]$上是单调递减的，所以当$x=\frac{a}{2}$时，$y_{\max}=\frac{1}{4}(a^2-a+2)=2$，解得$a=-2$或者$a=3$（舍去）.

（3）当$\frac{a}{2}<-1$即$a<-2$时，因为函数$y=-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{1}{4}(a^2-a+2)$在区间$[-1,1]$之上是单调递增的，所以当$x=-1$时，$y_{\max}=-1-a-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}=2$，解得$a=-2$（舍去）.

综上，$a=-2$或$a=\frac{10}{3}$.

结论

综上可知，二次函数乃是初等数学当中的重要内容，同时也是考试的一个重要考点，而二次函数方面的最值问题属于重要题型，主要考查考生的综合能力。为此，教学期间，数学教师需帮助学生对二次函数最值问题的常见解法进行归纳总结，进而促使其解题效率有效提高。

参考文献

[1]王霞.初中数学二次函数中一类线段最值问题的快速求解方法[J].数学教学通讯，2018（17）：79-80.

[2]唐义琴.实例分析配方法在初中二元二次函数最值问题求解中的运用[J].中学课程辅导（教师通讯），2017（20）：89.

[3]段振颖.关于初中二次函数最值问题求解方法的若干思考[J].知识文库，2016（12）：207.