数学问题解决的思维策略

王正国

（汕尾市城区汕尾中学　广东　汕尾　516600）

[摘　要]问题解决一直是数学教育中的一个热门话题。学习数学就离不开解题，解题是数学学习的基本形式和主要内容。由于问题解决所重视的是使用信息和事实的能力，是解题的思维过程、策略和思维方法，文章结合题目，阐述了数学问题解决中的思维策略。

[关键词]数学问题；问题解决；思维；策略

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.04.1574

数学思维策略是指在解决数学问题、发现数学知识的过程中所采取的总体思路。在运用数学知识和方法进行研究、学习过程中，当主体面对问题时，通常总是通过观察，抓住题目的特征进行广泛的联想，检索信息和回忆已储存的信息，即凭借已有知识和经验，作出直觉性的理解和判断，选择总体思路或入手的方向、原则。

一、策略的选择与观察问题的角度及联想范围有关

问题情境能诱发思维主体创新意识，促使主体开展积极的、有明确目的的思维活动，去努力寻求解决问题的途径。

例1.已知$x^2+y^2=4$，求$3x+4y$的最大值和最小值.

分析一：由$3x+4y$想到向量$\vec{a}=(3,4)$与向量$\vec{b}=(x,y)$的数量积，可利用平面向量数量积的性质完成。

解法一：设向量$\vec{a}=(3,4)$，向量$\vec{b}=(x,y)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=3x+4y$，因为$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，从而$|3x+4y|\le\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=10$，向量$\vec{a}$与$\vec{b}$同向即$x=\frac{6}{5}$时，$3x+4y$取最大值10；向量$\vec{a}$与$\vec{b}$反向即$x=-\frac{6}{5}$时，$3x+4y$取最小值-10。

分析二：借助三角函数知识，由$x^2+y^2=4\Longrightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$，可令$x=2\sin\alpha$，$y=2\cos\alpha$，从而把要求的二元函数的最大（小）值问题转化为单元函数的最大（小）值问题，得到解法二。

解法二：令$x=2\sin\alpha$，$y=2\cos\alpha$，则有

$3x+4y=6\sin\alpha+8\cos\alpha$

$=\sqrt{6^2+8^2}\sin(\alpha+\phi)$

$=10\sin(\alpha+\phi)$（其中$\tan\phi=\frac{4}{3}$）

而$-1\leqslant\sin(\alpha+\phi)\leqslant1$，

故$-10\leqslant3x+4y=10\sin(\alpha+\phi)\leqslant10$.

即$3x+4y$取最大值10最小值-10。

分析三：从$x^2+y^2=4$入手，解出x或y，代入$3x+4y$，将二元函数转化为一元函数，再利用导数为工具，利用导数的方法求函数的最大（小）值。

解法三：由$x^2+y^2=4\Longrightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$，代入$3x+4y$可得

$3x+4y=3x\pm4\sqrt{4-x^2}$，令$f(x)=3x\pm4\sqrt{4-x^2}$，

则$f'(x)=3\pm\frac{-4x}{\sqrt{4-x^2}}$，令$f'(x)=0$，解之并讨论可得：

当$x=\frac{6}{5}$时，$3x+4y$取最大值10；当$x=-\frac{6}{5}$时，$3x+4y$取最小值-10。

分析四：若从利用判别式法讨论函数取值范围的角度出发，可令$3x+4y=t$，将它与$x^2+y^2=4$联立，再用判别式法讨论t的取值范围。

解法四：令$3x+4y=t$，从而有$y=-\frac{3}{4}x+\frac{t}{4}$，代入$x^2+y^2=4$并化简可得

$25x^2-6tx+(t^2-64)=0$

由$\Delta=(-6t)^2-5\times25(t^2-64)\geqslant0\Longrightarrow t^2\leqslant100\Longrightarrow-10\leqslant t\leqslant10$

故$3x+4y$取最大值10；$3x+4y$取最小值-10。

分析五：若从数形结合的角度出发，发现$x^2+y^2=4$表示一个以原点为圆心，半径r=2的圆，而$3x+4y=t$（即$y=-\frac{3}{4}x+\frac{t}{4}$）表示一族斜率为$-\frac{3}{4}$的平行直线。

解法五：本题即点(x,y)在圆$x^2+y^2=4$上，求$3x+4y$的最大（小）值。为此，$3x+4y=t$所表示的直线与圆$x^2+y^2=4$有交点$\Longrightarrow d\leqslant r$（d表示圆心到直线的距离），即$\frac{|3\times0+4\times0-t|}{\sqrt{3^2+4^2}}\leqslant2$，从而有$|t|\leqslant10$，故$3x+4y$取最大值10；$3x+4y$取最小值-10。

分析六：从题目的结构特征出发，借助柯西不等式解决问题。

解法六：由柯西不等式，可得：

$(3x+4y)^2\leqslant(3^2+4^2)(x^2+y^2)=25\times4=100\Longrightarrow-10\leqslant3x+4y\leqslant10$

当且仅当$\frac{3}{x}=\frac{4}{y}$时，等号成立，故$3x+4y$取最大值10；

$3x+4y$取最小值-10。

从以上分析可知，主体学习的经历，对相关知识掌握的牢固程度，都会影响对策略的选择。也就是说，如果主体的认知结构中已经具备了相关信息，则主体就能以这些已有的知识为基础展开积极有效的思维活动，使主体逐步逼近问题解决的目标。如果主体的认知结构中尚无充分的信息储备，则主体就需要通过观察、实验、查阅资料、钻研相关问题等各种手段获取更多的可靠信息，以形成有关的最佳知识结构，通向问题解决之门。如上例中数学符号表征对应的概念的具体涵义，如果没有相应的信息（知识和技能）储备，便无法形成相应的思维策略。

二、就解决问题的过程而言，思维策略是一种宏观的指导

当主体从问题中获取相关信息后，首先是“这类问题”解决的一般策略，然后才是“这个问题”的解决方法。

例2.在△ABC中，a,b,c分别是内角A,B,C的对边，且满足$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.求角A的大小。

分析一：三角形中求角，一般情况下先求它的某个三角函数值，再根据角的范围救出角。已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，再加上$\sin^2A+\cos^2A=1$，解关于sinA、cosA的方程组即可。

解法一：由$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$可得

$\sin A=2-\sqrt{3}\cos A$

再把$\sin A=2-\sqrt{3}\cos A$代入$\sin^2A+\cos^2A=1$并整理可得

$4\cos^2A-4\sqrt{3}\cos A+3=0$

即：$(2\cos A-\sqrt{3})^2=0$

所以$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为A是三角形的内角，所以$A=\frac{\pi}{6}$.

分析二：对于asinα+bcosα型问题，一般化为

$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\phi)$（其中$\tan\phi=\dfrac{b}{a}$）

解法二：由sinA+$\sqrt{3}$cosA=2可得

$\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=1$

因为A是三角形的内角，所以$\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4\pi}{3}$，

从而$A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，于是$A=\dfrac{\pi}{6}$.

分析三：形如ac+bd的式子，一般可以考虑向量$\vec{m}=(a,b)$和向量$\vec{n}=(c,d)$的数量积。

方法三：设向量$\vec{m}=(\cos A,\sin A)$和向量$\vec{n}=(\sqrt{3},1)$，则$\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}\cos A+\sin A=2$

由于$|\vec{m}|=1$，$|\vec{n}|=2$，所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|$，

从而$\vec{m}$和向量$\vec{n}$方向相同，进而可得$A=\dfrac{\pi}{6}$.

“一般化”策略，往往使主体有一种豁然开朗之感，从而打开思路，“发现”问题解决的方法。

三、当思维受阻时，及时调整方向，变换不同角度再进行分析思考，这本身也是思维策略

例3.解方程：$\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+5}=6$

按照“一般化”策略，这个方程带根号，通过去根号，转化为整式方程。多数人“一般”情况下可能会直接两边平方，马上就会发现式子变得很复杂，如果不及时调整思考方向，就只好放弃了。

分析一：如果把其中一个根号移项，然后再两边平方，x^2项就可以相消，然后再通过平方去一次根号，便可以得到与原方程同解的整式方程。

解法一：由原方程可得 $\sqrt{x^2+4x+5}=6-\sqrt{x^2-4x+5}$

两边同时平方并整理可得：$3\sqrt{x^2-4x+5}=9-2x$

再两边同时平方并整理得：$5x^2=36$

从而$x=\pm\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

经检验，$x=\pm\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$是原方程的解.

分析二：直接给方程两边同时平方会使计算很复杂，如果能够联想到$\sqrt{x^2+y^2}$的几何意义，把问题转化为求几何图形与x轴交点的横坐标。

解法二：原方程等价于$\sqrt{(x+2)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+1}=6$，它表示x轴上的点(x,0)到两个定点（-2,1）和（2,1）的距离之和等于定长6

由于到定点（-2,1）和（2,1）的距离之和等于定长6的点的轨迹是椭圆

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$$

所以原方程的解就是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$与x轴交点的横坐标。

把y=0代入椭圆方程并整理得：$x^2=\dfrac{36}{5}$

从而$x=\pm\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

经检验，$x=\pm\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$是原方程的解.

研究表明，思维必须具有目的性，思维总是指向于解决某个问题。“思起于疑”，有了恰当的合适的问题，人们才能专注地进行思维。思维的普遍形式是问题解决，解决问题首先要具备思维的动机，并经历发现问题、分析问题、提出问题解决方案（即解决问题的原则、途径和方法），选择或建立有关的数学模型，实施问题解决，对所得的结论进行检验和解释等过程。在解决数学问题的思维过程中，特别是在没有直接明显的方法可循时，主体必须灵活地运用数学基础知识和思维的基本方法，针对具体问题的条件和结论的特征进行探索、分析，才能发现解题途径。

参考文献

[1]解密高中数学解题思维/陈中峰，刘开明著.－福州：福建教育出版社，2019.9

作业简介：

王正国（1971-），男，祖籍陕西，高中数学高级教师，本科学历，理学学士学位，广东省名班主任，广东省名班主任工作室主持人。

（上接第1645页）

供了极大的便利，因此掌握ADO.NET数据访问技术是非常重要的。

参考文献

[1]邵谦谦，银华强等编著.精通Visual Basic.NET2003数据库开发[M].北京：清华大学出版社，2003

[2]王 瑄，李 燕编著.使用Microsoft Visual Basic.NET开发XML Web Serveices和Server Components[M]，北京，北京希望电子出版社，2003

[3]Kenneth S.Lind著，天宏工作室译.MCAD/MCSDMicrosoft Visual Basic.NET XML Web服务与服务器组件开发学习指南[M].北京，清华大学出版社，2004

[4]贾文晋，薛为民编著.Visual Basic.NET组件开发专业教程[M].北京，清华大学出版社，2004

作者简介：

谷震离，1964年12月出生，男，汉族，河南鄢陵人，本科，教授，硕士生导师，研究方向为数据库技术、MCAI软件工程化、系统评价体系与评价模型研究。

基金项目：2019年度广东省高等教育教学改革项目：新工科大数据环境下信息管理与信息系统专业高级人才培养体系研究与实践；2017年广东技术师范学院“创新强校”项目：信息管理与信息系统系的专业课程建设（991460325）