直线过定点问题的方法探究

李琼　王秀文
（广州市第一一三中学　广东　广州　510655）

[摘　要]通过对近几年高考直线过定点问题的探究，归纳直线过定点问题的常用方法。

[关键词]直线；定点
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.06.436

1 内容分析

新高考下的命题原则：注重对学生数学核心素养的考查，处理数学核心素养与知识的关系。如何使学生在复习备考的过程中提升素养是一线教师关注的话题。纵观近几年的高考试题，直线过定点问题是历届高考的热点问题。

2 典例剖析

例题(2019年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标III）第21题）已知曲线C：$y=\frac{x^2}{2}$，D为直线$y=-\frac{1}{2}$上的动点，过D作C的两条切线，切点分别为,A,B.

（1）证明：直线AB过定点。　　（2）略.

（1）证法1

思路探求：可设A,B两点坐标，用导数法求切线斜率，求出A,B两点处的切线方程，切线AD和BD有相同的形式，从而得到带参数直线AB的方程，最后求出它所过的定点。

证明：设$D(t,-\frac{1}{2})$，$A(x_1,y_1)$，则$y_1=\frac{1}{2}x_1^2$．又因为$y=\frac{1}{2}x^2$，所以$y'=x$.则切线AD的斜率为X_1，故$y_1+\frac{1}{2}=x_1(x_1-t)$，整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B(x_2,y_2)$，同理得$2tx_2-2y_2+1=0$.点A,B都满足直线方程$2tx-2y+1=0$.

于是直线$2tx-2y+1=0$过点A,B，而两个不同的点确定一条直线，所以直线AB方程为$2tx-2y+1=0$．即$2tx_2-2y_2+1=0$，当$2x=0,-2y+1=0$时等式恒成立，所以直线AB恒过定点$(0,\frac{1}{2})$.

方法点睛：设$D(t,-\frac{1}{2})$引入参数t，通过两切线AD和BD方程式的“模样”一致，把t看成常数，发现A,B点都满足直线方程2tx-2y+1=0.联想到动点轨迹，得到的直线系方程。考查了“数学抽象、逻辑推理、数学运算”核心素养。

证法2

思路探求：用导数法求切线斜率，能否直接利用A,B两点的坐标写出切线和的方程，进而得到它们的交点D的坐标？

证明：设A(x_1,y_2),B(x_1,y_2)则$y_1=\frac{1}{2}x_1^2$．又$\because$ $y=\frac{x^2}{2}$，所以$y'=x$.

切线AD的斜率为x_1，切线AD的直线方程：$y-\frac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$.

即同理切线的直线方程：$y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2$.

联立切线AD和BD的方程$\begin{cases}y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2\\y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2\end{cases}$得交点$D$ $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2}\right)$，

又因为点D在直线$y=-\frac{1}{2}$上，所以$\frac{x_1x_2}{2}=-\frac{1}{2}$即$x_1x_2=-1$.

由题意可知直线AB的斜率存在，设直线AB的方程为y=kx+b，代入$y=\frac{1}{2}x^2$得：$x^2-2kx-2b=0$，得$x_1x_2=-2b=-1$,所以$b=\frac{1}{2}$，所以直线AB过定点$(0,-\frac{1}{2})$.

方法点睛：证明直线过定点的关键是引入参数设出直线方程，通过一定关系转化，找出两个参数之间的关系式，进而可以判断过定点情况。与解法一相比，计算量虽大一些，但更直观和常规。

3 变式训练

1、（2017年高考数学全国卷I理科第20题）已知曲线C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），四点$P_1$（1,1），$P_2$（0,1），$P_3$（-1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），$P_4$（1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）中恰有三点在椭圆C上。

（1）求曲线C的方程；

（2）设直线l不经过P_2点且与曲线C相交于A,B两点.若直线P_2A与直线P_2B的斜率的和为-1，证明：l过定点。

2、（2018年高考数学全国卷I理科第19题的变式）已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，直线l与抛物线C交于A,B两点,O是坐标原点。

(1)若直线l过点F且$|AB|=8$,求直线l的方程；

(2)若点E(-2,0),直线l不与坐标轴垂直,且$\angle AEO=\angle BEO$,证明:直线l过定点。

4 结束语

直线过定点问题的解题方法常见的有三种。

第一种是引入参数，得到带参数的直线方程$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$（λ为参数）再由$\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$的解得到定点。证法1就是采用这种办法。

第二种方法就是直接设出直线方程$y=kx+b$或者$x=my+n$，再根据题目条件寻找参数之间的关系，求出或消去某个参数得到定点。证法2就是这个方法的例子。这种方法在直线与圆锥曲线的相交问题中使用热度极高，常用韦达定理为寻找两个参数之间的关系提供了重要讯息。

第三种方法是由特殊到一般，将特殊情况下得到的结论推广到一般情形。这种方法能够较快捷地得到结论，省时高效。但在使用这种方法前要考虑特殊情况的存在性，若特殊情况不存在，这种方法就不能使用。

参考文献：

[1]邹素文.圆锥曲线中直线过定点问题的求解方法[J].中学教学参考,2021(20):21-22.