求证数列不等式成立的三种解题思路

蒋玉祥

（广西桂林市资源县资源中学，广西　桂林　541000）

[摘　要]数列不等式的证明这类题型是将数列和不等式这两个高中阶段的数学知识中重要的内容糅合在一起考查的一类题目，因此这类题型对于学生对知识的掌握和理解，以及对知识综合运用都具有很高的要求，符合高考命题的指导思想“以能力立意”和符合高考的命题原则“在知识网络交汇处”。本篇文章将会针对求证数列不等式的题型进行分析，提供几种解答相关题目的解题思路以供同学们学习和理解。

[关键词]数列不等式；解题技巧；方法分析

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.06.2291

一、合理构造，运用数列的单调性

形如$\left(\frac{1}{A+B}+C\right)\cdot\left(\frac{1}{2A+B}+C\right)\cdot\left(\frac{1}{An+B}+C\right)>\sqrt{An+B}$

这样的不等式证明其成立，我们可以通过构造数列再结合数列的单调性的方法来解题。第一步分析实际题目中给出的需要求证的不等式，构造一个数列a_n，令$a_n=\left(\frac{1}{A+B}+C\right)\cdot\left(\frac{1}{2A+B}+C\right)\cdots\left(\frac{1}{An+B}+C\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{An+B}}$，第二步利用$a_n$找出$a_n+1$的数列，找出它们的公比$q=\frac{a_n+1}{a_n}$或者公差$d=a_n+1-a_n$，第三步根据公比$q$或公差$d$判断出数列$a_n$的单调性，最后利用单调性即可证明原数列不等式是否成立。

例题1已知n为任意的自然数，请证明：

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}.$$

证明　根据题目可知，该不等式为数列不等式，首先，我们就可以构造数列，令$a_n(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，

则公比

$$q=\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)}\sqrt{(2n+3)}}=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+2)^2-1}}>\frac{2n+2}{2n+2}=1.$$

公比$q=1$，因此$a_n+1>a_n$，那么数列$\{a_n\}$就是一个单调递增的数列.

因此有：$a_n\geqslant a_1=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$，

即可得：$(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$成立.

评析　如果题目中所已知的信息中含有数列的相关因素或者与自然数有关的不等式问题求证明时，就可以使用构造数列然后利用数列的单调性来证明是否成立。

二、合理放缩，顺其自然

形如$(q)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant(q)n-2$（$q$相同）这样的不等式证明其成立，我们就可以通过放缩法来解题。在实际题目中，第一步根据题目给出的不同条件，找到一个中间量并且可以进行放缩的式子，分别设为$h(x)$和$g(x)$，第二步将需要求证的不等式$(q)n-1\leqslant x_n\leqslant(q)^{n-2}$的两边的数列分别进行放大或者缩小，再分别结合题目所给出的条件分析，将两边的数列与$h(x)$和$g(x)$比较大小，分别得到$(q)^{n-1}\leqslant x_n$和$x_n\leqslant(q)^{n-2}$，最后将上述不等式综合起来，即可得证原数列不等式$(q)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant(q)^{n-2}$成立。

例题2　若存在函数$f(x)=x^3+x^2$，已知数列$\{x_n\}(x_n>0)$的首项为$x_1=1$，以后数列的每一项都按照如下的方式确定：曲线$y=f(x)$在点$(x_{n+1},f(x_{n+1}))$处的切线平行于经过点$(0,0)$和$(x_n,f(x_n))$两点的直线.求证：当$n\in N^*$时：

（1）$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$；

（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

证明　（1）$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$成立.证明过程略.

（2）设$h(x)=x^2+x$，那么函数$h(x)$在$x>0$时单调递增，那么就由（1）可得：

$$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}\leqslant4x_{n+1}^2+2x_{n+1}=(2x_{n+1})^2+(2x_{n+1}),$$

因此：$x_n\leqslant2x_{n+1}$，也就是$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\frac{1}{2}$，

进一步得出：$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n+1}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；

又结合

$$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}\geqslant(2x_{n+1})^2+2x_{n+1}=2(x_{n+1}^2+x_{n+1}).$$

设$Y_n=x_n^2+x_n$，那么就有$\frac{Y_{n+1}}{Y}\leqslant\frac{1}{2}$，并且当$x=1$时，$Y_1=2$，因此$Y_n=Y_2\cdot\frac{Y_2Y_3}{Y_1Y_2}\cdots\frac{Y_n}{Y_{n-2}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，

那么就可以得出：$x_n\leqslant x_n^2+x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

综上可得：$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$成立.

1、裂项相消，方便快速

形如$T_n=\frac{q_n}{S_n}$，$\sum_{i=1}^{n}T_i<A(n=1,2,3\cdots)$（A为常数）这样的不等式证明其成立，我们可以通过裂项相消的方法来解题。在实际题目中，第一步分别找出数列的通项公式，将通项公式代入到前n项和S_n的式子中，得到新的S_n的式子，第二步就是将新的S_n的式子代入到需要证明的$T_n=\frac{q^n}{S_n}$中，进而得出T_n的式子，第三步就是求出$\sum_{i=1}^{n}T_i$的值，最后与常数A比较大小即可证明是否成立。

关于证明数列不等式的题型，证明的方法还有很多，本篇文章只介绍了裂项相消法、放缩法和构造数列法这三种方法。数列不等式证明对于同学们的综合能力要求很高，也能培养同学们认识问题、分析问题和解决问题的能力。

参考文献

毕明黎，王丽.例谈数列不等式证明的若干放缩技巧[J].中学数学，2010，000（007）:30-32.

林明成.构造数列证明不等式的几种思路[J].中学数学教学，2008，000（002）:35-38.