

试论数学推理过程的逻辑性——兼论什么是有逻辑的推理

李瑞杰

(河南医药健康技师学院 河南 开封 475000)

[摘要]《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《标准》)认为:逻辑推导从一般事实和命题入手,按照规律提出对其他命题的基本素养。大致分为两种:一种是从特别到普通的逻辑结构推导,推导形态一般有归纳和类比;另一类从普通到特别的逻辑推理,推理形式大多有演绎。逻辑推理是获取数理结果,形成数理系统的重要方法,是数理严谨性的基础保障,是人类在数理活动中实现交流的基础思维品质。

[关键词]逻辑推理;数学命题;数学定义

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-6288.2021.07.382

前言

实际上,数理教育、哲学乃至思维逻辑学都存在一种很窘迫的局势,一方,人类认为数学的推导是有逻辑结构的,同时,人类也很难用简洁的语句、一般地描述明白什么数学语言的推导是有逻辑结构的。这也就是,人类很难用简洁的语句、一般地描述明白什么样的推导是有逻辑结构的。这里力图将这个问题论述明白,并试图用最简单的数理语句和符号描述明白数学逻辑推理的基本形式,更具体地说,描述明白前文中提到的逻辑推理依据的基本原则是什么。尽管作者对这个问题已经进行了很长期的缜密思索,但还是会有一部分说法不准确、矛盾或者不恰当的地方,敬请批评指正。

一. 数学的定义

在中国形式逻辑的教科书中,对概念的“定义”大体上是一样的^[1]:定义是揭示研究对象意义的基本逻辑方法。这样的表述显得十分深刻,这样的表述对概念的功能寄托着极大的希望。这种对概念的深刻理解主要来自希腊哲学,但由于希腊哲学中对概念的要求非常严苛,例如,希腊早期学者苏格拉底就在辩论过程中特别注重对概念的严谨,而美国思想家杜兰则在他的作品中生动地描绘了与苏格拉底的争论场面,并且在评论苏格拉底的争论风格时说:“再也没有比下定义更困难,更能严峻地考验和锻炼一个人思路的清晰和措辞的技巧了”。

实际上,现代哲学的进展证明,要对概念本身做出界定是一个相当艰难的事情,而且随着哲学研究的深化,人类进行概念的形态越来越多样化。即便如此,出于探究数学推理的需要,这里仍然明确地提出二类数理概念的形式:一类叫做名义定义,来源于古代中国哲学;一类叫做实质定义,来源于希腊哲学。

二. 数学的命题

数学定义是明确了数学本身的研究对象,而数学本身的结果是通过命题方式表示的。同实质概念一样,命题理论本身的表达方式也是一种说明语言,即命题理论本身的目的并不仅仅在于给某个事件名称,只是在于仅仅说明有关于已正式名称了的事物。而命题理论陈述句述说的事实,既可以是正确的、又可以是错的,由于这样,命题理论陈述句也给人提供了一种结论:或是用逻辑的方法加以分析判断,或是利用经历的事实加以证明论断。所以人类常称前一类判断方法是分析的,

后一类判断方法是综合性的。

数学命题本身的主观性和客观性。所以,数学命题的主观性和客观性是根据思考家来说的:如果说命题本身是思想者正要思考的事物,那么数学命题是主体的;而如果说数学命题的出现和思考家不相干,那么数学命题便是思考家要评判的曾经出现过的事物,那么数学命题是客观性的。

三. 数学的推理

人是一种感性的动物,只是依靠直觉得到的判断结果常常是错误的,相反通过逻辑推理得出的结果总可以说服别人,有理有据才可以经受得住长时间的考验^[3]。

人们通常相信,通过计算数学本身的推导必然是一个有逻辑的推导。但现在,如果通过计算数学本身命题证明(包含命题本身中的计算数学本身概念)试着性地论证,怎样的推导步骤、或者怎样的过程是有逻辑的。又一次表明,这样的探索实践尝试是十分必要的,这并不仅是为了逻辑学发展的需求,更主要的是为了使广大数理学习者、以及一线的数学教师从一般层次上认识和掌握现代传统数学逻辑推理,从而认识和掌握“逻辑推理”这种数理教育的核心素质。先回顾笛卡尔在探讨怎样开展科学逻辑推理教育时所提出的意见,其在《探求真理的指导原则上》的第6个原则中说:

为了在复杂的事件中区分出最简单事项,从而展开有秩序的研究。这就需要人们在一个已经通过演绎而得出真理的演绎过程中,考察哪一种事项是最简单项,并且考察这种项目和其他事项间关联的远近,或者相等。

这里接受了笛卡尔的意见,认为性质命题为最简单项,认为不多于三个性质命题的逻辑推理即为简化推论。以便更清晰地描述逻辑推理的思想脉络,只探讨基于简化推论的逻辑性。出于论述问题的方便,将三个命题分别叫做前提命题、中间命题和结果命题。

四. 演绎推理:验证数学结论的方法

证明数学研究结果时也会使用归纳推论,不过一般是演绎推论。

虽然,数学归纳法是一个通过证明部分元件而获得总体结果的推论方式,显然也应该包括回归推论,但有所不同的地方是:集合中的元素是“有序”的,证明的程序就是“有序”展开的。数学归纳法有许多的变换形态,例如:跳步数学归纳法、

倒序数学归纳法等，但“有序”这种实质上是不变化的。由于篇幅限制，此处仅论述常见的数学归纳法。

设集合A是以1展开的自然数集合，而集合上的“序”是自然数的大小关系，假设命题P能够构造与“序”相关的所有命题。数学归纳法的推导步骤是如下的：

验证基于序的命题 $P(1), P(2), \dots, P(n), \dots$

(1) 验证命题 $P(1)$ 。如果成立，

(2) 假设命题 $P(k)$ 成立，验证命题 $P(k+1)$ 。如果成立，

(3) 所有命题成立。

下面，论证基于数学归纳法的推理方法是有逻辑的，得到的结论是必然合理的。

用反证法。假如“所有命题成立”则这个结论就不对。因为，必须存在一些自然数，使相应的有序命题不成立。令 m 为使有序命题 $P(m)$ 不成立的最小自然数。由于证明了 $P(1)$ 存在，所以 $m \geq 2$ ，即 $m-1$ 是一个大于等于1的自然数。因为 m 是有序命题不存在的最小的自然数，那么有序命题证明 $P(m-1)$ 存在。这与数学归纳法的(2)表示程序相悖，所以推定不存在。而根据反证法，则所有命题证明都存在。

由于已论述了反证法的准确性，于是我们可以用反证法推论数学归纳法，经过以上的讨论便可知数学归纳法的推导过程是有逻辑意义的，得出的结果也必定合理。出于对现代数学推导分类的清晰，现在规定，基于以下三个基本规律，假设某一个逻辑推理方法的准确性，能够通过被关系传递的第一类性质传递性地进行推论，则这个推论方法就构成了演绎推理。就这样，反证法和数理归纳法也都构成了演绎推理。

五. 归纳推理(II)：基于两个集合得到数学结论的方法

类比是基于对两个集合的推论：“观察到两个或两类事物在许多属性上都相同，便推出它们在其他属性上也相同，这就是类比法。”

和归纳相同，由类比得出的结果也是对或然成立的，但同时，就得到的结果本身来说，又可分成二个情形：一个情况是结果可能是必然的类比，而另一个情形则是结果已知是对或然的类比。

1. 结论可能是必然的类比。如果类比将越来越多地依赖于规律性的发掘，那类比也将更多地依赖于跳跃的联系。庞加莱猜想就是类比的典型，通过这种演绎过程可以发现，通过类比的逻辑推理是有逻辑意义的，尽管得出的结果并不见得合理，但和归纳方法相比，通过这样的逻辑推理仍然是知识创造的最基本手段。

2. 结论已知是或然的类比。在工作生活和生产的实际中，人们在做出一个事物之前，总会先在小范围内作一些尝试，并由此得到经验，进而思索怎样在更大范围内推行。虽然，人们无法判断已经“发生”过的事情必然再度发生，但人们相信小范围与大范围是类似的，事物的发生状况“八九不离十”。利用这种凭经验，人们按照这一类事件发生的可能性推断了另

一类事件再发生的可能性，这便是对结果已知或者是或然的类比。出于科学研究的方便，人们可以将这样的思维过程归于以下的模式：

集合A和B中的元素都具有属性Q。

集合A中的元素具有性质P的可能性为 m/n 。

推断集合B中的元素具有性质P的可能性为 m/n 。

其实，这个思维模式也就是一般所说的调查研究。例如，估算鱼塘中鱼的总量，但因为不可能将鱼池中的全部鱼类都打捞起来清点，所以只能采取抽样调查的方式。先打在鱼池中打一网鱼，假如有 n 条，将这种鱼做上标记投放回鱼池；过一段时间后再打一网鱼，假如有 M 条，其中 M 条是有标记的。那么如何通过抽样调查的结果预测鱼塘中鱼的数量呢？以下分析这个问题。

设鱼池内有大鱼 N 条，其中有记号的 N 条（即第一网鱼的数量）；第二网捞捕 M 条，包括有标记的 M 条。根据思想方法，大范围有记号鱼的比率应该基本低于小范围有记号鱼的比率，所以 $n/N = m/M$ ，所以鱼塘中鱼的数量一般是 $54: n = nM/m$ 。

这样的思考方法已经被广泛用来处理很多实际问题，例如，对野外哺乳动物的考察，对森林生态文化资源的合理发展与使用，等等。其实，对价值波动的判断也是这样。为方便投资人更好地掌握投资方向，金融机构制定出股票价格指数（股票交易指标），用于显示股票价格的变动情况。可是各种证券形形色色、股市千变万化，怎样能够进行简单明了而又比较客观的股市价格指数呢？这必须通过对比的方式，选择几个有代表性的企业，用这些企业的平均股价变化来代替整体证券交易市场的公司股价变化。道琼斯指数是美国的重要股票价格指数，是世界历史较为久远的股市指标。道琼斯指数一开始选取了十一种商业运输公司的股票，从一八九七年开始再选取二十种制造业和交通运输公司的股票，其后代表性公司股票数量逐步增加至六十五种。

透过以上的二个实例我们可以发现，将结论已知或然的类比的思考方式似乎无所不在，而对于现代数学教师、尤其是对于基础阶段的数学课堂，必须使学习者发展这种的思考方式，那么，又需要透过什么样的教学达到这么的目标呢？

六. 结束语

经过以上的论述，对数学教师、尤其是基础教育阶段的数学教师至少需要澄清二个事实：一个事实是，不要仅仅让学生牢记几个定义，学会几个解题的技能，建立并发挥数学核心素质，尤其是逻辑推理素质；另外的一个事实就是，学生逻辑推理文化素养的建立与发展，从根本上，并非靠老师“教”出来的，而是靠学生“悟”出来的。

参考文献

[1]徐莉.培养逻辑推理能力 提升数学核心素养[J].数理化解题研究, 2021(17): 26-27.

[2]喇钦全.基于逻辑推理能力发展的高中数学核心素养培养分析[J].试题与研究, 2021(13): 157-158.