关于n进制中数字之和函数三次均值的计算

李博

陕西铁路工程职业技术学院

[摘　要]设 $m=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots\cdots+a_sn^{k_s}$ $(1\le a_i<n,\ i=1,2,\cdots,s.\ k_1>k_2>\cdots>k_s\ge 0)$ 则 $a(m,n)=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_s$，$A_k(N,n)=\sum\limits_{m<N}a^k$（m，n）(k=1，2，3)．给了 $A_k(N,n)$ $(k=1,2,3)$ 的精确计算公式。

[关键词]n进制；数字之和函数；均值

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.08.363

一、引言及结论

在文[1]中，美国数论专家Florentin Samarandache提出了数字之和函数数列让我们研究，我们在文[2]和文[3]分别给出了 $A_1(N,n)$ 和 $A_2(N,n)$ 的精确计算公式，本文猜测出了 $A_3(N,n)$ 的精确的计算公式，并给予证明。为了叙述方便我们引用下列记号：

$$\varphi_k(n)=\sum_{i=1}^{n-1}i^k\qquad \varphi_1(n)=\frac{n(n-1)}{2}\qquad \varphi_2(n)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

定义：设 $n(n\ge 2)$ 为一给定的正整数，对任一正整数 m，假定 m 在 n 进制中表示为：

$$m=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots\cdots+a_sn^{k_s}$$

记　$a(m,n)=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_s$

令　$A_k(N,n)=\sum\limits_{m\langle N}a^k(m,n)$　$k=1,2,3$　k_i 为正整数 $i=1,2,\cdots,s.$

定理【1】：设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots\ \ +a_sn^{k_s}$ 其中 $k_1>k_2>\cdots>k_s\ge 0$，$1\le a_i<n$；

$i=1,2,\cdots s$　则

$$A_3(N,n)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\Big(k_ia_i\varphi_1^{\ 2}(n)\big((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(k_i-3)k_i\big)+3\varphi_2(n)\big(2a_i\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+nk_i\varphi_1(a_i)\big)+3n\varphi_1(n)$$
$$\big((n-1)\varphi_1(a_i)\varphi_1(k_i)+k_i\varphi_2(a_i)\big)+n^2\varphi_1^{\ 2}(a_i)+3n(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)\big(k_ia_i\varphi_2(n)+n\varphi_2(a_i)+(n-1)a_i$$
$$\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+2k_i\varphi_1(a_i)\varphi_1(n)\big)+\frac{3}{2}n^2a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2\big((n-1)k_i+(a_i-1)\big)+n^2a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^3\Big)n^{k_i-2}$$

推　论　1　　　设 $N=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots\cdots+2^{k_s}$，$k_1>k_2>\cdots>k_s\ge 0$　　则

$$A_3(N,2)=\sum_{i=1}^{s}\Big(k_i^{\ 3}+3(2i-1)k_i^{\ 2}+6(i-1)(2i-1)k_i+8(i-1)^3\Big)2^{k_i-3}$$

推 论 2　　设 $N=a_110^{k_1}+a_210^{k_2}+\cdots\cdots+a_s10^{k_s}$，其中 $1\le a_i<10,\quad i=1,2,\cdots,10;$

$k_1>k_2>\cdots>k_s\ge 0$　则

$$A_3(N,10)=$$
$$25\sum_{i=1}^{s}\Big(40\varphi_1^{\ 2}(a_i)+3645k_i(k_i-3)+180k_ia_i(a_i^{\ 2}+8a_i+14)+15390k_i^{\ 2}a_i-2430(k_i+a_i-1)+$$
$$30(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)\big(36\varphi_1(a_i)+4\varphi_2(a_i)+3k_ia_i(27k_i+11)\big)+60a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2(9k_i+a_i-1)+40(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^3\Big)10^{k_i-3}$$

二、定理的证明

定理1，定理2已经证明过，这里只证明定理3，首先引入下列引理。

引理【1】[2]：　$A_1(n^k,n)=\dfrac{n-1}{2}kn^k$　　(1)

引理【2】[2]：　$A_1(an^k,n)=\dfrac{a}{2}\big((n-1)k+(a-1)\big)n^k$　　(2)

引理【3】[3]：　$A_2(n^k,n)=\big(k\varphi_2(n)+(n-1)\varphi_1(n)\varphi_1(k)\big)n^{k-1}$　　(3)

引理【4】[3]：

$A_2(an^k,n)=\big(ka\varphi_2(n)+n\varphi_2(a)+(n-1)\varphi_1(n)\varphi_1(k)+2k\varphi_1(n)\varphi_1(a)\big)n^{k-1}$　　(4)

引理【5】：

$A_3(n^k,n)=\Big(k\varphi_1^{\ 2}(n)\big((2n-1)+\dfrac{1}{2}(n-1)(k-3)k\big)+6\varphi_1(n)\varphi_2(n)\varphi_1(k)\Big)n^{k-2}$　　(5)

证明：(1)当 $k=1$ 时，

左边：　$A_3(n,n)=a^3(1,n)+(2-1,n)+\cdots\cdots+a^3(n-1,n)$

$$=1^3+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^3$$

$$=\varphi_1^{\ 2}(n)$$

右边：　$n\varphi_1^{\ 2}(n)\cdot n^{-1}=\varphi_1^{\ 2}(n)$

∴　　左边=右边　命题成立

(2)假设 $k=p$ 时，命题成立。即

$$A_3(n^p,n)=\Big(p\varphi_1^{\ 2}(n)\big((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(p-3)p\big)+6\varphi_1(n)\varphi_2(n)\varphi_1(p)\Big)n^{p-2}$$

则 $A_3(n^{p+1},n)=\sum_{m<n^{p+1}}a^3(m,n)$

$$=\sum_{m<n^p}a^3(m,n)+\sum_{n^p\le m<2n^p}a^3(m,n)+\cdots+\sum_{(n-1)n^p\le m<n^{p+1}}a^3(m,n)$$

$$=\sum_{m<n^p}a^3(m,n)+\sum_{0\le m<n^p}\left(a(m,n)+1\right)^3+\cdots+\sum_{0\le m<n^p}\left(a(m,n)+(n-1)\right)^3$$

$$=n\sum_{m<n^p}a^3(m,n)+3\sum_{m<n^p}a^2(m,n)(\sum_{i=1}^{n-1}i)+3\sum_{m<n^p}a(m,n)(\sum_{i=1}^{n-1}i^2)+(\sum_{i=1}^{n-1}i^3)n^p$$

$$=nA_3(n^p,n)+3\varphi(n)A_2(n^p,n)+3\varphi_2(n)A_1(n^p,n)+\varphi_1^{\,2}(n)n^p$$

由假设与（1）、（2）得

$$A_3(n^{p+1},n)=\left(p\varphi_1^{\,2}(n)((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(p-3)p)+6\varphi_1(n)\varphi_2(n)\varphi_1(p)\right)n^{p-1}+3\varphi_1(n)\left(p\varphi_2(n)+\varphi_1(n)\varphi_1(p)(n-1)\right)n^{p-1}+\frac{3}{2}(n-1)p\varphi_2(n)n^p+\varphi_1^{\,2}(n)n^p$$

$$=\left((p+1)\varphi_1^{\,2}(n)((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(p-2)(p+1))+6\varphi_1(n)\varphi_2(n)\varphi_1(p+1)\right)n^{p-2}$$

$\therefore k=p+1$ 时，命题成立。　　　证毕。

引理〖6〗：

$$A_3(an^k,n)=\left(ka\varphi_1^{\,2}(n)((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(k-3)k)+3\varphi_2(n)\left(2a\varphi_1(n)\varphi_1(k)+kn\varphi_1(a)\right)+3n\varphi_1(n)\left((n-1)\varphi_1(a)\varphi_1(k)+k\varphi_2(a)\right)+n^2\varphi_1^{\,2}(a)\right)n^{k-2} \quad (6)$$

证明：$A_3(an^k,n)=\sum_{m<an^k}a^3(m,n)$

$$=\sum_{m<n^k}a^3(m,n)+\sum_{n^k\le m<2n^k}a^3(m,n)+\cdots+\sum_{(a-1)n^k\le m<an^k}a^3(m,n)$$

$$=\sum_{m<n^k}a^3(m,n)+\sum_{0\le m<n^k}\left(a(m,n)+1\right)^3+\cdots+\sum_{0\le m<n^k}\left(a(m,n)+(a-1)\right)^3$$

$$=a\sum_{m<n^k}a^3(m,n)+3\sum_{m<n^k}a^2(m,n)(\sum_{i=1}^{a-1}i)+3\sum_{m<n^k}a(m,n)(\sum_{i=1}^{a-1}i^2)+(\sum_{i=1}^{a-1}i^3)n^k$$

$$=aA_3(n^k,n)+3\varphi(a)A_2(n^k,n)+3\varphi_2(a)A_1(n^k,n)+\varphi_1^{\,2}(a)n^k$$

代入(1)、(3)和(5)，得

$$A_3(an^k,n)=\left(ka\varphi_1^{\,2}(n)((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(k-3)k)+3\varphi_2(n)\left(2a\varphi_1(n)\varphi_1(k)+kn\varphi_1(a)\right)+3n\varphi_1(n)\left((n-1)\varphi_1(a)\varphi_1(k)+k\varphi_2(a)\right)+n^2\varphi_1^{\,2}(a)\right)n^{k-2}$$

证毕。

有了以上6个引理我们容易给出定理的证明，事实我们有：

$$A_3(N,n)=\sum_{m<N}a^3(m,n)$$

$$=\sum_{m<a_1n^{k_1}}a^3(m,n)+\sum_{a_1n^{k_1}\le m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}}a^3(m,n)+\cdots+\sum_{N-a_sn^{k_s}\le m<N}a^3(m,n)$$

$$=\sum_{m<a_1n^{k_1}}a^3(m,n)+\sum_{0\le m<a_2n^{k_2}}\left(a(m,n)+a_1\right)^3+\cdots+\sum_{0\le m<a_sn^{k_s}}\left(a(m,n)+\sum_{i=1}^{s-1}a_i\right)^3$$

$$=\sum_{i=1}^{s}A_3(a_in^{k_i})+3\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)A_2(a_in^{k_i})+3\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2A_1(a_in^{k_i})+\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^3a_in^{k_i}$$

将(2)、(4)和(6)代入、整理得：

$$A_3(N,n)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left(k_ia_i\varphi_1^{\,2}(n)((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(k_i-3)k_i)+3\varphi_2(n)\left(2a_i\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+nk_i\varphi_1(a_i)\right)+3n\varphi_1(n)\left((n-1)\varphi_1(a_i)\varphi_1(k_i)+k_i\varphi_2(a_i)\right)+n^2\varphi_1^{\,2}(a_i)+3n(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)\left(k_ia_i\varphi_2(n)+n\varphi_2(a_i)+(n-1)a_i\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+2k_i\varphi_1(a_i)\varphi_1(n)\right)+\frac{3}{2}n^2a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2\left((n-1)k_i+(a_i-1)\right)+n^2a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^3\right)n^{k_i-2}$$

所以，有

$$A_3(N,n)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left(k_ia_i\varphi_1^{\,2}(n)((2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(k_i-3)k_i)+3\varphi_2(n)\left(2a_i\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+nk_i\varphi_1(a_i)\right)+3n\varphi_1(n)\left((n-1)\varphi_1(a_i)\varphi_1(k_i)+k_i\varphi_2(a_i)\right)+n^2\varphi_1^{\,2}(a_i)+3n(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)\left(k_ia_i\varphi_2(n)+n\varphi_2(a_i)+(n-1)a_i\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+2k_i\varphi_1(a_i)\varphi_1(n)\right)+\frac{3}{2}n^2a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2\left((n-1)k_i+(a_i-1)\right)+n^2a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^3\right)n^{k_i-2}$$

于是证明了定理

参考文献

[1]Florentin Samarandache.Only Problems, not solutions.chicago.Xiquan Pubhishiug house, 1993.P22.

[2]李海龙，杨倩丽.关于n进制及其有关计数函数[J].纯粹数学与应用数学，2002(01)：13-15+20.

[3]杨倩丽，李海龙.关于n进制中数字之和函数均值的计算[J].西北大学学报(自然科学版)，2002(04)：361-362+366.

[4]R.Ayoub.Euler and the Zeta function[J].Amer, Math Monthly 1974(81)：1067-1086.

[5]N.Y.zhang and K.S.Williaws.Some Series represeution of $\zeta(2n+1)$ [J].Rocky Mountain.J.Math

[6]Hailong Li, Number Theory and Special Functions[M], Science Press, Beijing: 2011".

作者简介:

李博（1991-），男，汉族，陕西渭南人，理学硕士，陕西铁路工程职业技术学院基础课部教师，从事数论研究。