巧设空间模型载体 考查直观想象素养

梁士伟

（广州彭加木纪念中学）

[摘　要]球的外接几何体问题在高考命题中是常考题型，此类试题情境呈现和设问方式多种多样，主要考查空间想象能力，数学建模和直观想象素养。本文结合各种外接情境，巧设空间模型载体，让外接球的求解问题化难为易，化抽象为直观，进一步提升学生空间想象能力，培养学生直观想象的能力素养。

[关键词]几何体；模型载体；数学建模

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.08.640

球的外接几何体问题在高考命题中是常考题型，此类试题情境呈现和设问方式多种多样，主要考查空间想象能力，数学建模和直观想象素养。本文结合各种外接情境，巧设空间模型载体，让外接球的求解问题化难为易，化抽象为直观，进一步提升学生空间想象能力，培养学生直观想象的能力素养。

类型一　墙角模型（几何特征：三条棱两两垂直，不需找球心位置，可求外接球半径）

（i）经典墙角模型：是指在三菱锥中，三条棱两两垂直且交于一点，因常见于墙角，因此成为经典墙角模型。如图（1-1）所示：

（ii）类墙角模型：三棱锥中，三条棱两两垂直，但并不交于一点，即三棱锥的四个面都为直角三角形，也称“鳖臑”。如图（1-2）

以上两种的模型都归为墙角模型，其几何特征为存在三条棱两两垂直，此三棱所构成的四棱柱（即长方体）的外接球即为棱锥的外接球。

解题思路：找出两两垂直的棱的边长 a,b,c，利用 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，求出外接球的半径 R 即可。

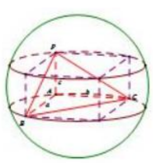


图 1-1

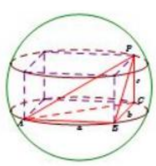


图 1-2

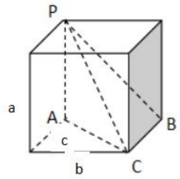
例1　在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑。若三棱锥 $P-ABC$ 为鳖臑，$PA\perp$平面$ABC, PA=AB=2$，$AC=4$，三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为

$A.8\pi$　　$B.12\pi$

$C.20\pi$　　$D.24\pi$

思路：如图，三棱锥 $P-ABC$ 四个面都是直角三角形，可以补形构造出一个长方体，因为

$PA=AB=2$，$AC=4$，所以 $a=2,b=2,c=2\sqrt{3}$，则 $R=\sqrt{5}$，所以 $S_{表面积}=20\pi$.选C



类型二　垂面模型（几何特征：侧棱垂直于底面）

如图2-1　$PA\perp$底面ABC，底面ΔABC为任意形状的三角形。

解题思路：利用正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$，求出底面所在圆的直径 $2r$，再根据勾股定理 $(2R)^2=PA^2+(2r)^2$，求出外接球的半径 R.

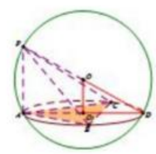
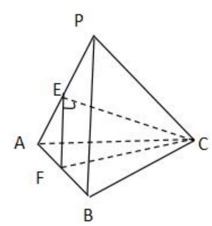


图 2-1

例2（2019年全国Ⅰ卷理12）已知三棱锥 $P-ABC$ 在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，ΔABC 的是边长为2的正三角形，E,F 分别是 PA,AB 的中点，$\angle CEF=90^0$，则球 O 的体积为（）

$A.8\sqrt{6}\pi$　　$B.4\sqrt{6}\pi$　　$C.2\sqrt{6}\pi$　　$D.\sqrt{6}\pi$



思路：如图，因为 $PA=PB=PC$，ΔABC 的是边长为2的正三角形，所以 $P-ABC$ 为正三棱锥，所以 $PB\perp AC$，又 E,F 分别是 PA,AB 的中点，所以 $EF\,//\,PB$，所以 $EF\perp AC$.又 $EF\perp CE, CE\cap AC=C$，所以 $EF\perp$平面PAC，$PB\perp$平面PAC，所以本题满足垂面模型。易证明得底面 PAC 为等腰直角三角形，因此所在外接圆的直径为AC，AC=2，则由 $(2R)^2=PB^2+AC^2=\sqrt{2}^2+2^2=6$，所以 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{6\sqrt{6}}{8}=\sqrt{6}\pi$

类型三　对棱相等模型（可补形为长方体）

如图3－1，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=CD, AD=BC, AC=BD$.求外接球的半径。

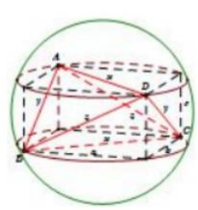


图 3-1

思路：不妨将三棱锥补形为一个长方体，令三组相等的对棱为长方体的面对角线。并设$AB=CD=x,AD=BC=y,AC=BD=z$

且设长方体的三边长分别为a,b,c，根据勾股定理，列出方程组$\begin{cases}a^2+b^2=x^2\\a^2+c^2=y^2\\b^2+c^2=z^2\end{cases}$，从而求出$a,b,c$，再根据$(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，求出外接球的半径R.

例3 在三棱锥$A-BCD$中，$AB=CD=5,AD=BC=6,AC=BD=7$，求三棱锥$A-BCD$外接球的表面积。

思路：三棱锥满足对棱相等模型，因此将其补形为一个长方体，并设长方体三边分别为a,b,c，则由方程组$\begin{cases}a^2+b^2=25\\a^2+c^2=36\\b^2+c^2=49\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=6\\b^2=19\\c^2=30\end{cases}$ $(2R)^2=a^2+b^2+c^2=55$

$S_{表面积}=4\pi R^2=55\pi$

类型四 侧棱相等模型（棱锥的各侧棱相等，即顶点在底面的投影为底面外接圆的圆心，常见正三棱锥或正四面体题型）

如图，顶点P的投影点为底面ΔABC外接圆的圆心，即$PA=PB=PC$.解题思路：（1）确定球心O和底面ΔABC的外心O_1，则P,O,O_1三点共线。（2）利用正弦定理求出外接圆半径r，在根据勾股定理求出三棱锥的高$h=PO_1$.（3）再由勾股定理$OA^2=OO_1{}^2+AO_1{}^2$，即$R^2=(h-R)^2+r^2$，求出外接球的半径R.

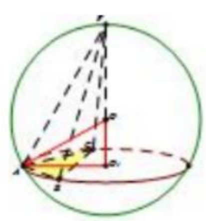
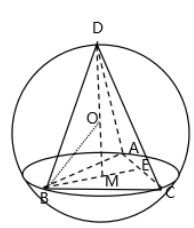


图 4-1

例4（2018全国III卷理10）设A,B,C,D是同一个半径为4的球的球面上四点，ΔABC为等边三角形且面积为$9\sqrt{3}$，则三棱锥$D-ABC$体积的最大值为

$A.12\sqrt{3}$　$B.18\sqrt{3}$　$C.24\sqrt{3}$　$D.54\sqrt{3}$

思路：如图，点M为三角形的重心，点E为AC的中点，当$DM\perp 面ABC$时，三棱锥$D-ABC$的体积最大，此时$OD=OB=R=4$.因为$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=9\sqrt{3}$，所以$AB=6$.底面$\Delta ABC$外接圆直径$2r=\frac{AB}{\sin 60^0}=4\sqrt{3}$,所以$r=BM=2\sqrt{3}$，在$Rt\Delta OMB$中，有$OM=\sqrt{OB_2-BM^2}=2$，所以$DM=OD+OM=4+2=6$，故$(V_{D-ABC})_{\max}=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$，选B。



类型五 折叠模型（平面四边形沿对角线折叠为空间四边形，常见模型有两个等腰三角形或全等三角形拼接或者菱形的折叠）

利用外心垂线法，即外接球的球心必为任意两个底面的外心垂线的交点，如图5-1

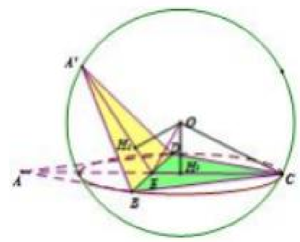


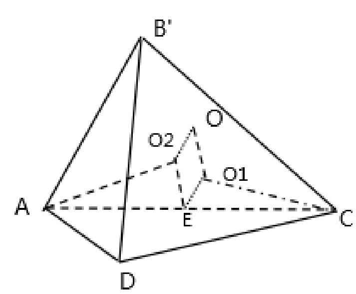
图 5-1

（1）找出ΔBCD和$\Delta A'BD$的外心H_1和H_2；分别作外心H_1和H_2的垂线，并交于点O，则O即为外接球的球心。

（2）连接OE,OC，解ΔOEH_1，算出OH_1，在$Rt\Delta OCH_1$中，由勾股定理$OC^2=OH_1{}^2+CH_1{}^2$

例5.1 在平面四边形$ABCD$中，$AB=AD=\sqrt{2},CB=CD=\sqrt{10},AC=4,$沿直线AC将$\Delta ACB$翻折成$\Delta ACB'$，当三棱锥$B'-ADC$的体积取得最大值时，该三棱锥的外接球表面积为__________。

思路：易知，当$平面AB'C\perp 平面ACD$时，三棱锥$B'-ADC$的体积取得最大值，如图，设O_1,O_2分别为ΔADC和ΔABC的外接圆圆心，作出两个截面圆的外心的垂线，则交点即为球心O，利用正弦定理容易求出外接圆半径r_1和r_2，E为AC的中点，因为$O_2E=OO_2$，可求出外接球半径$R=\sqrt{6}$，则外接球的表面结$S=4\pi R^2=24\pi$



结语

空间几何体外接球问题，考查了几何体和外接球的空间关系，每一种空间关系都可以通过搭载一种空间模型，巧妙的将椎体与球的外接关系转化为更加直观的长方体与球的外接关系或者转化为球的直径与底面外接圆直径以及高之间的勾股关系。本文就是通过搭载空间模型的途径解决了外接球求解的问题，不仅解决了球体的热点难点问题，更进一步发展学生直观想象的能力素养，提升学生空间想象能力。

参考文献

[1]黄林盛 以模型为载体解决空间几何体的外接球和内切球问题[J].中学数学研究，2019（4）：14-17

[2]陈小波 高考数学难点问题全面破解36测[M]广州：广东经济出版社.2019.

基金项目：【本文是广州市教育科学规划2019年度课题“直观想象素养下的高中数学教学实践研究”（课题编号：201912008）阶段性研究成果。】