解析法分析平面运动刚体上点的速度和加速度

赵振昊[1]　孔艳平*[2]
（1.石家庄铁道大学 机械工程学院　河北　石家庄　050043；
2.石家庄铁道大学 工程力学系　河北　石家庄　050043）

[摘　要]应用解析法分析了平面运动刚体上一点的速度和加速度，找出了其位置与时间的函数关系，直接建立该点的运动方程，为平面运动图形上点的速度和加速度分析提供了另一种有效方法.

[关键词]平面运动；速度；加速度；解析法
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.08.192

理论力学是是机械类专业学生的主干课程之一，也是机械原理、机械设计等后续专业课程的重要基础，同时在学生构建工程概念、解决工程实际问题等方面起到重要作用[1]。刚体的平面运动是理论力学运动学部分的重要内容，学习这部分内容的主线是把平面运动分解成两种基本的运动，可以取任意基点分解为平移和转动，其中，平移的速度和加速度与基点的选择有关，而绕基点转动的角速度和角加速度与基点的选择无关[2, 3]。在求解平面运动刚体上某点的速度和加速度时，可以用平面运动理论来分析，例如：求解平面运动图形上某点的速度有基点法、投影法和速度瞬心法，求解加速度时要求学生掌握基点法。但是，如果能找出平面运动图形上动点的位置和时间的函数关系，可以直接建立运动方程，用解析的方法求其运动全过程的速度和加速度[4, 5]。本文通过解析法对典型例题的分析，为平面运动刚体上点的运动规律提供了一种有效方法。

1 基点法求加速度

三角板在滑动过程中，其顶点A和B始终与铅锤墙面以及水平地面相接触，已知AB=BC=AC=b，$v_B = v_0$为常数，在图1所在位置，AC水平。求三角板上C点在此瞬时的加速度。

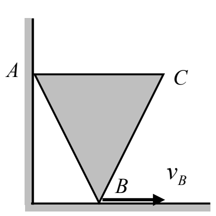

图 1

角速度应用瞬心法，加速度应用基点法求得：

三角板ABC作平面运动，瞬心为D点，如图2所示，角速度为：

$$\omega = \frac{v_B}{DB} = \frac{2\sqrt{3}v_0}{3b}$$

取B点为基点，作A点的加速度图，得到：

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^{n}$$

$$a_{AB}^{\tau} = a_{AB}^{n}\tan 30^0 = \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b}，\quad \alpha = \frac{a_{AB}^{\tau}}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b^2}$$

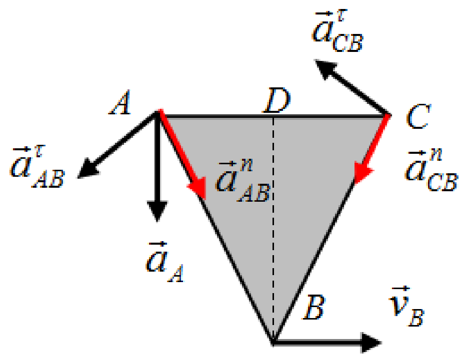

图 2

取B点为基点，作C点的加速度图，得到：

$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^{\tau} + \vec{a}_{CB}^{n}$，因为$a_C = 0$，得到：

$$a_C = b\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b}。$$

2 解析法求加速度

设经过时间dt，三角板ABC逆时针转过角度dθ，如图3所示，此时C点相对于B的速度为v_{CB}，C点相对于A点的速度为v_{CA}，由$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$，得到：

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{CB} = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} \quad （1）$$

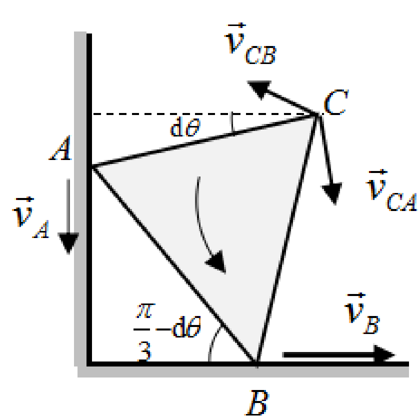

图 3

将（1）式 在水平方向投影得到：

$$v_{CB}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)-v_B=v_{CA}\sin\mathrm{d}\theta \quad (2)$$

将（1）式 在竖直平方向投影得到：

$$v_{CB}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)=v_{CA}\cos d\theta-v_A \quad (3)$$

由（2）式得

$$v_{CA}=\frac{v_{CB}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)-v_B}{\sin\mathrm{d}\theta} \quad (4)$$

由（3）式和（4）式得

$$v_{CB}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)=\frac{v_{CB}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)-v_B}{\sin\mathrm{d}\theta}\cos d\theta-v_A \quad (5)$$

化简（5）式得

$$v_{CB}=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)v_B \quad (6)$$

C点相对于B的速度在x轴和y轴的投影可以表示为：

$$\begin{cases} v_{CBx}=-\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\mathrm{d}\theta\right)|\vec{v}_B| \\ v_{CBy}=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\mathrm{d}\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\mathrm{d}\theta\right)|\vec{v}_B| \end{cases} \quad (7)$$

C点的速度在x轴和y轴的投影可以表示为：

$$\begin{cases} v_{Cx}=\left[\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]|\vec{v}_B| \\ v_{Cy}=\frac{2}{3}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{2\pi}{3}\right)|\vec{v}_B| \end{cases} \quad (8)$$

初始时刻C点的速度在x轴和y轴的投影可以表示为：

$$\begin{cases} \vec{v}_{C_0x}=0 \\ \vec{v}_{C_0y}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left|\overrightarrow{v_B}\right| \end{cases} \quad (9)$$

则在dt时刻内C点速度的变化为：

$$\mathrm{d}\vec{v}_C=\vec{v}_C-\vec{v}_{C_0}=\left(\left[\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]|\vec{v}_B|,\ \left[\frac{2}{3}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]|\vec{v}_B|\right) \quad (10)$$

C点速度大小的变化为：

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\vec{v}_C| &= |\vec{v}_B|\sqrt{\left[\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]^2+\left[\frac{2}{3}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]^2} \\ &= |\vec{v}_B|\sqrt{\left[\frac{8}{9}-\frac{4}{9}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{9}\cos\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]} \end{aligned} \quad (11)$$

三角板ABC上B点移动的距离为dL，转过dθ所需的时间为：

$$\mathrm{dt}=\frac{\mathrm{d}L}{v_B}=\frac{b\left[\sin\left(\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-0.5\right]}{v_B} \quad (12)$$

$$\vec{a}_C=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{dt}} \quad (13)$$

C点加速度大小为：

$$a_C=\frac{v_B^2\sqrt{\left[\frac{8}{9}-\frac{4}{9}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{9}\cos\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]}}{b\left[\sin\left(\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-0.5\right]} \quad (14)$$

由将式（14）分子部分泰勒展开得：

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{8}{9}-\frac{4}{9}\sin\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{9}\cos\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)} \\ &=\sqrt{\left[\frac{8}{9}-\frac{4}{9}\left[0.5-\frac{1}{2}\times\frac{16\times\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}+\sqrt{3}\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{8\sqrt{3}\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)^3}{2\times3!}\right]-\frac{4\sqrt{3}}{9}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}-\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{8\times\left(2\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)^3}{2\times3!}\right]\right]} \\ &=\frac{4}{3}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

由将式（14）分母部分泰勒展开得：

$$\sin\left(\mathrm{d}\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\cos\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}-(\mathrm{d}\theta)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}\theta-\frac{\sqrt{3}}{12}(\mathrm{d}\theta)^3-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}\theta$$

因此，三角板ABC中C点的加速度大小为：

$a_C=\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{v_B^2}{b}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{v_0^2}{b}$，与基点法所求结论一致。

3 结论

本文应用解析法分析了平面运动刚体上一点的速度和加速度（以三角板为例），与基点法不同的是，解析法可以求其运动全过程的速度和加速度，也为该问题求解提供了不同的分析方法，加深了对平面运动图形上点的运动规律的理解。

参考文献

[1]孔艳平，段淑敏.圆轮在固定面纯滚动时其上任意一点的加速度分析[J].物理教师，2015（12期）：61-63.

[2]邓敏艺，白克钊，谭惠丽.刚体平面运动的教学设计与讨论[J].广西物理，2015（02）：48-50.

[3]刘汉忠.对刚体平面运动一典型实例的讨论[J].物理通报，2000，08：22-23.

[4]范钦珊，陈建平.理论力学.第2版[M].高等教育出版社，2010

[5]哈尔滨工业大学理论力学教研室.理论力学Ⅰ[M].高等教育出版社，2016.