培养数学思维反思性能力提升学生核心素养

张小明

（广东省揭阳市揭西县河婆中学　广东　揭阳　515400）

[摘　要]高中数学教学为发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的教学环境，启发学生思维，引导学生把握数学内容的本质，提倡独立思考，自主学习，合作交流等多种学习方式，激发学生学习数学的兴趣，养成良好的学习习惯，促进学生实践能力和创新意识的发展，关注学生数学学科核心素养的形成和发展。素质教育是以学生为主体的教育，为了更好的实现“以教师为主导，以学生为主体”这一教学理念，在高中数学教学中注重学生数学思维反思性的培养显得尤为重要。检查解题过程是否正确，训练思维的严密性；运用类比联想，开拓思维，一题多解；引导学生细心分析问题，独立思考，鼓励学生勇于创新，这对学生数学思维反思性的培养会有一定的帮助。

[关键词]反思性；严密性；培养

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.09.1749

数学反思顾名思义，“思”是指“心”上有块“田”，那么，“反思”就是指“田”上有颗“心”。不断地“反思”就是指在“心田”上长出更多的“心”。这样，“心心”之火就会燃为燎原之势，创新的实质就是要不断地创“心”（反思）。

“扪心自问”、“反求诸己”，这些耳熟能详的成语都反映了古人的“反思”意识。费赖登塔尔教授指出“反思是数学思维活动的核心和动力”，“通过反思才能使现实世界数学化”。波利亚说，“如果没有了反思，他们就遗漏了解题中一个重要而且有效的阶段，通过回顾完整的解答，重新斟酌、审查结果及导致结果的途径，他们能够巩固知识，并培养他们的解题能力”。曹才翰先生认为“培养学生对学习过程进行反思的习惯，提高学生的思维自我评价水平，这是提高学习效率、培养数学能力的行之有效的方法”。

《普通高中数学课程标准》则把“反思”这一教学理念提到了应有的高度：“人们在学习数学和运用数学解决问题时，不断地经历……反思与建构等思维过程。这些过程是数学思维能力的具体体现，有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断”。“评价应关注学生能否不断反思自己的数学学习过程，并改进学习方法”。标准的这一提出，要求学生在平时学习中有学后反思的意识及能力.而这恰是我们所要提倡和引导的.

解题反思能力是对解题活动的反思，主要包括对题意理解的反思、试题涉及知识点的反思、解题思路形成的反思、解题规律的反思、解题结果表述的反思及解题失误的反思。从一个新的角度多层次、多方面地对问题及解决问题的思维过程进行全面的考察、分析和思考，从而深化对问题的理解、优化思维过程、揭示问题本质、探索一般规律、沟通新旧知识间的迁移、深化对知识的理解。

一、培养解题反思能力的重要性

通过对所教班级学生的了解，绝大多数学生没有经常回顾学习的习惯，多数只能做到偶尔回顾当天所学的内容，小部分的学生从不回顾学习情况。大部分学生只限于通过考试或解题来了解自己的学习水平，途径单一，而表示不清楚自己学习水平的学生占大多数。在学习或解题过程中，大部分的学生没有做小结的习惯，只有少许的学生有在做完一题后进行归纳的习惯。而对于解题后作进一步的思考，会想一想题目有哪些变化的学生则更少。由此看来，多数学生没有养成反思习惯，在数学解题教学中，我发现学生存在着两大弊端：

一是只管做题目，像猴子摘玉米，过一段时间又不知其所以然。这类学生往往比较刻苦，只注重做题的数量，而不重视做题的质量；只注重做题结果，而不重视解题的过程及解题后的反思。

二是遗忘快，学了后面忘了前面。这类学生往往只注重知识个体而忽略整体，没有系统性，数学学习靠记忆的成分多；只注重知识学习、注重当前效果，只顾“勇往直前”，却缺乏“回头看”。

我认为在要求学生解题时，应鼓励学生自我探索，发现规律，不断鼓励学生对讲评内容，尤其是自己出错的知识点进行“二次思维”。加深学生对该知识的印象，避免重蹈覆辙。因此，学生在解题中要具备反思的能力和养成反思的习惯，经常进行自我诊断和反思，引导学生反思是有效提高解题效率的重要措施。

二、培养解题反思能力的途径

目前数学教学最薄弱的正是数学的反思性学习这一环节，而它又是数学学习活动中的最要的环节，由于数学对象的抽象性，数学活动的探索性，数学推理的严谨性和数学语言的特殊性，决定了高中生必须要经过多次反复思考，深入研究，自我调整，即坚持反思性数学学习，才可能洞察数学活动的本质特征。笔者在教学实践中觉得有以下途径可以实施反思。

（一）挖掘内涵，反思发现

爱因斯坦说过“发现一个问题比解决一个问题更重要”通过挖掘题目内涵找出新问题。

案例1：[数列例题]一个等差数列的第6项是5，第3项和第8项的和也是5，求这个等差数列前9项的和?

此题要学生解出答案并不难，若仅仅解出答案，则学生的能力没有得到提高，我在讲评时，点击思维，引导学生进入反思。

师：“这里的数字5重要吗？”，“$S_9=0$的根本原因是什么？”

经过思考，学生甲：“5”并不重要，重要的是“阿$a_6=a_3+a_8$”，$S_9=0$根本原因是$a_5=0$.

于是学生联想到等差数列的性质，有如下巧解：因$a_6=a_3+a_8=a_5+a_6$，得$a_5=0$ 所以$S_9=\frac{(a_1+a_9)}{2}9=9a_5=0$.

师：“能推广吗？”

很快地，不少学生便独立地给出了下面的简单推广：$\{a_n\}$为等差数列，若$a_n+a_m=a_p$则$S_{2(m+n-p)-1}=0$，　$(m,n,p\in N^*)$.

为了让学生对知识有一个横向的反思，再问：“等比数列有类似的结论吗?”基础好一点的学生便能得出：$\{a_n\}$为等比数列，T_n为其前n的积，若$a_na_m=a_p(m,n,p\in N^*)$，则$T_{2(m+n-p)-1}=1$.

通过以上教学，由特殊到一般，由等差数列到等比数列，由单一到综合，一步一步引导学生进行反思、交叉、汇合，提供了学生思维发展的良好素材，同时也培养了学生的解题反思能力.

（二）展示常规，反思本质

在平时解题教学中，对例题，习题，作业的学习应引导学生深入探究，展示通性，通法，从建构学的角度可以使学生做一个题，明白一类题，抓住一串题，培养学生的解题反思能力，达到举一反三目的.

案例2：（1）设点A，B的坐标分别为（－5，0），（5，0）。直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积是$-\frac{4}{9}$，求点M的轨迹方程。（选修2－1P44例3）

（2）设点A，B的坐标分别为（－5，0），（5，0）。直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积是$\frac{4}{9}$，求点M的轨迹方程。（选修2－1 P59探究）

学生很容易求出轨迹方程，若教师点评到此为止，则失去了课本两题的典型性和示范性，其实老师可将本例加以改造，展示试题通性、通法，从而培养学生的反思能力。

改为1：动点M到两点A（a，0）和B（-a，0）连线的斜率的乘积为定值k（k≠0），求动点M的轨迹?

解：设动点M的坐标为（x，y），则 $K_{AM}=\frac{y}{x-a}$，$K_{BM}=\frac{y}{x+a}$所以$k=\frac{y^2}{x^2-a^2}$ 即$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-ka^2}=1$（$x\neq\pm a$） 有：

①当k<-1时， 点M的轨迹为焦点在y轴上的椭圆，且以AB为其短轴（A，B两点除外，下同不予重复）

②当k=-1时， 点M的轨迹为以AB为直径的圆

③当-1<k<0时，点M的轨迹为焦点在x轴上的椭圆，且以A，B为其长轴

④当k>0时，点M的轨迹为焦点在X轴上的双曲线，且以AB为其实轴

改为2：：动点M到两点A（0，a）和B（0，-a），（a>0）的连线斜率的乘积为定值k（k≠0），求点M的轨迹?

改为3：：动点M到两点A（m，t）和B（n，t）的连线斜率的乘积为定值k（k≠0），求点M的轨迹?

通过对习题的归类、改造，揭示两题的本质，展示通性、通法，培养学生的反思能力，使学生的解题能力得到螺旋式上升。这样的反思有助于思维合理化、精确化、概括化。

（三）设计变式，反思归纳

变式思维的认识依据是事物间有相似性，进行变式的训练，使学生参与到教学中，能使学生抓住知识的联系与区别，促使学生进行思考，总结，激发学习动力。

解题教学中若能改变原题的结构或其他方面，往往可使一题变一串，有利于开阔眼界，拓展思路，提高应变能力，防止定势思维的负面影响，并要思考与该题同类的问题，进行对比，分析其解法，找出解答这一类题的技巧和方法。解题后要把解题中所联系到的基础知识与各知识有机地“串联”成知识线，“并联”成知识网，有利于提高分析和归纳的思维能力。

案例3：（选修2－3.P58.例4）某射手每次射击击中目标的概率是0.8，求这名射手在10次射击中，恰好8次击中目标的概率?

分析：为了使学生深入理解，使学生处理这类独立重复试验问题不进入程式化硬套公式，我进行以下变式教学，引起学生反思，使学生对知识的深度有更细更好的理解。

变一：某射手每次射击击中目标的概率是0.8，求此人射击6次中3次命中且恰有2次连续命中目标的概率？

变二：某射手每次射击击中目标的概率是0.8，求此人射击6次中3次命中且不连续命中目标的概率？

分析：这是附带条件的独立重复试验问题，三题比较，反思本质，总结独立重复试验概率公式P（n=k）中，n次独立重复试验中这个事件恰好发生哪k次呢？它有几种可能的情况，由以上变式，使学生能通过反思，理解，在解决这类概率问题时，要注意k次有无限制条件，切忌硬套公式。

通过以上一系列的变式题组，可以通过反思，进行分析归纳汇总，有哪些同类型的问题?常见的有哪些形式?应分别采用哪些不同的处理方法?注意的关键点又是什么?

（四）引导多解，反思角度

我们在提问、举例、讲评数学问题时，要倡导一题多解，一题多变，多题一解的训练，并根据所教对象和内容的特点，精心创设一个符合学生认知规律，激发学生求知欲的由浅入深、多层次、多变化的问题情境，启发探索，诱导反思，养成多角度分析数学问题的习惯。

案例4：当x＝1时，二次函数f（x）有最小值1；若把f（x）的图象向下移动3个单位，此时函数的图象与x轴相交，并截得x轴上一段线段长为4个单位；求函数f（x）的解析式。

首先让学生认识到图象移动前后所对应的两个函数f（x）、g（x）之间的关系为f（x）=g（x）+3。其次引导学生具体分析函数g（x）所满足的三个条件，并从中探索解题的方法。

方法一，如果三个条件理解为图象过三点（1，-2），（-1，0），（3，0），由y=g（x）=ax^2+bx+c，求出a，b，c；

方法二，如果理解为图象是抛物线，其顶点是（1，-2），且过点（-1，0），由y=g（x）=a$(x-1)^2$-2，

求出a。

方法三，如果理解为方程g（x）=0的两个根为-1，3，且函数y=g（x）的图像过点（1，-2），由y=g（x）=a（x+1）（x-3），求出a。最后可解得f（x）=0.5x^2-x+1.5。

从二次函数g（x）解析式的三种形式入手，引导学生理解与掌握待定系数法这一数学方法，而不停留在单纯的解题上。

在解题训练时要求学生不能仅满足于一种解法，鼓励他们进一步思考其他解法。通过讨论与交流，从中鉴别各种方法的作用与最佳方法，并通过各种方法引导学生认识解题的核心问题与共同本质。我有时宁可让学生少做些题，但要求用两种甚至两种以上的方法做好某些题。

通过此法，教学生反思，培养学生思维的广阔性，让学生善于从不同角度，不同方面去思考问题，寻求变异。

（五）指导小结，反思脉络

一个数学问题的解决，并不等于这个问题思维活动的结束，而是对这个问题进行深入研究的开始，如果此时停止了这个问题的思维活动，将错过反思的大好良机，只解决了“怎样做？”等问题，而没有解决“是否解中有错？”“为什么这样解？”“还能怎样解？”等问题，这些问题只有在不失时机的解后反思才能得到解决，更重要的是学生通过对自己的思维过程的再验证、再认识，使自己对数学概念、定理、方法等各个方面从感性认识上升到理性认识，极大的提高思维水平。

对数学解题反思可以思虑从以下几个方面小结：

①对解题过程的反思：即解题过程中，自己是否很好地理解了题意？是否弄清了题干与设问之间的内在联系？是否能较快地找到了解题的突破口？在解题过程中曾走过哪些弯路？犯过哪些错误？这些问题后来又是怎样改正的？

②对解题方法与技能的反思：即解题所使用的方法、技能是否有广泛应用的价值？如果适当地改变题目的条件和结论，问题将会出现怎样的变化？有什么规律？解决这个问题还可以用哪些方法等等。

③题目立意的反思：即所解决的问题有什么意义？还有哪些问题需要进一步解决？

三、结语

数学反思能力的培养要与数学能力（思维能力、空间想象能力、解决实际问题的能力等）的培养有机结合起来，两者相互配合、协调发展，才能提高数学学习的效率，取得好的效果。

反思只是手段，而且它的实质在于“发现问题”和“解决问题”。在这种意义上，反思不是越多越好，而是恰到好处才好。同时反思的程度也是以解决问题为标准，也就是说，问题解决了，一次反思相应结束，而且反思的问题应该是经过选择的具有一定意义的问题，而不是缺乏应有价值的问题。

参考文献

[1]吴海兵.高中数学反思思维在数学课堂中的渗透[J].数学大世界（中旬），2018（01）：43.