一元函数极限的求法

邵明月　李晨

（商丘工学院　河南　商丘　476000）

[摘　要]本文介绍了一元函数求极限的若干方法，通过函数特征选用了适当的方法，并通过实例来说明该方法的应用。

[关键词]一元函数；洛必达法则；夹逼准则；等价无穷小替换

【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.09.1670

一、极限的定义

定义1　设$f(x)$在点$x=a$的空心邻域$U^{\circ}(a)$有定义.如果存在常数A，对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时对应的$f(x)$有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，

则称A为函数$f(x)$当x趋于a时的极限，记作

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to a)$.

定义2　设$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义.如果存在常数A，对于任给的$\varepsilon>0$，总存在正数M $(\geq a)$，使得当$|x|>M$时有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，

则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

二、一元函数求极限的方法

（一）定义法

例1　用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

证$\forall\varepsilon>0$，由不等式

$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$

得

$|x-1|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，则当时$0<|x-1|<\varepsilon$，就有

$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$

由函数极限$\varepsilon-\delta$定义有

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

总结：一般情况下已知一元函数的极限值，我们可以运用定义法来证明一元函数的极限就是该值.用极限的定义时，只需要证明存在δ，使得$|f(x)-A|<\varepsilon$成立即可.

（二）运用极限运算法则以及极限性质的方法

定理1　若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则函数$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$

当$x\to x_0$时也存在，且

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（3）若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$在$x\to x_0$时极限也存在，

且有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$.

定理2　在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

性质1　有限个无穷小的和也是无穷小.

性质2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质3　常数与无穷小的乘积是无穷小.

性质4　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例2　求$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-2}=-1$

例3　求$\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}$

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{3}$

总结：运用函数极限的四则运算法则求一元函数极限是最基本的方法，运用时需注意的是在自变量的同一趋近过程中各个函数的极限必须存在且对函数化简后分母的极限不能为零.若自变量的同一趋近过程中分母的极限为零，分子的极限为一非零常数，则分式趋近无求大。若自变量的同一趋近过程中分母与分子的极限均为零，则分式求极限需用其他方法。

（三）运用两个重要极限

1.第一个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

注　第一个重要极限变形与推广：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$、$\lim\limits_{()\to0}\frac{\sin()}{()}=1$.

例4　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$.

2.第二个重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

注　第二个重要极限变形与推广：$\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$、$\lim\limits_{()\to0}(1+\frac{1}{()})^{()}=e$等.

例5　求$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{-2}})^{\frac{x}{-2}\cdot(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$.

（四）等价无求小替换

定义3（等价无穷小）　设α、β是同一个自变量变化过程中的无穷小，且$\alpha\neq0$，如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\partial\sim\beta$.

定理3　设$\alpha\sim\alpha^{'},\beta\sim\beta^{'}$且$\lim\frac{\beta^{'}}{\alpha^{'}}$存在，则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta^{'}}{\alpha^{'}}$

结论：当$x\to0$时

$\sin x\sim x$、　$\tan x\sim x$、

$arc\sin x\sim x$、　$\arctan x\sim x$、

$\mathrm{e}^x-1\sim x$、　$\ln(1+x)\sim x$、

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$、　$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

例6　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　当$x\to 0,(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2,\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

（五）利用函数连续性求极限

定理4　若函数f在x_0点处连续，则f在点x_0有极限，且极限值等于函数值$f(x_0)$. 设复合函数$y=f[\psi(x)]$是由函数$y=f(u)$，$u=\psi(x)$复合形成的，并且$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，则$y=f[\psi(x)]$在$x=x_0$处的极限存在且

$$\lim_{x\to x_0}f[\psi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\psi(x)]=f(a).$$

例7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解　令$a^x-1=y$，则$x=\log_a(1+y)$，当$x\to 0$时，$y\to 0$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}[\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}]}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a,$$

由此可见，利用连续性可以求复合函数不连续点处的极限，只要该函数满足定理条件.

（六）用导数定义求极限

定义4（导数定义）函数$f(x)$在点x_0的某个邻域有定义，当自变在量x在x_0处取得增量Δx（点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内）时，相应地，因变量取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则此极限值就称函数$f(x)$在点$x_0$的导数记为$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

在这种方法的运用过程中，首先要选好$f(x)$，然后把所求极限，表示成$f(x)$在定点x_0的导数.

例8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\ln(0+1)}{x}$$
$$=\ln(x+1)'\Big|_{x=0}=\frac{1}{x+1}\Big|_{x=0}=1.$$

（七）用洛必达法则求极限

定理5　若（1）$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$或$\lim f(x)\to\infty$，$\lim g(x)\to\infty$；

（2）$f(x)$与$g(x)$在其定义域内可导，且$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$=A（A是实数，也可为$\pm\infty$或∞），

则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\text{A}.$$

例9　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

分析：题目属$\dfrac{0}{0}$型，用等价无穷小$\sin x\sim x$代换后，再用洛必达法则.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x}=-\dfrac{1}{6}$

注（1）并不是类似于“$\frac{0}{0}$”型和“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限都能用洛必达法则，利用洛必达法则求解，一定要先验证是否满足洛必达法则求解.

（2）应用洛必达法则，要分别求分子、分母的导数，而不是求整个分式的导数.

（3）要及时简化极限符号后面的分式，在化简以后检查是不是仍是不定式，若遇到不是不定式，应立即停止使用洛必达法则，否则会引起错误.

（4）当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在时，本法则失效，但并不是说极限不存在，此时求极限须用另外方法.

（5）将等价无穷小量代换等求极限的方法与洛必达法则结合起来使用，可简化计算.

（6）在使用洛必达法则时，若一次未成，其结果仍为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$为型，且满足洛必达法则其它条件，仍可继续使用，直到不能使用或不是不定式.

（八）利用泰勒公式求极限

在处理某些特殊函数的极限时，用以上方法会受到一定的限制或是计算过于繁琐，则可考虑用泰勒公展式（或麦克劳林公式）来求极限，但在运算过程中，必须注意高阶无穷小的运算及处理.

例10 求$\lim(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}-(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}\right]$（令$t=\frac{1}{x}$）

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[(1+t)^{\frac{1}{5}}-(1-t)^{\frac{1}{5}}\right]=\frac{1+\frac{1}{5}t+o(t)-\left[1-\frac{1}{5}t+o(t)\right]}{t}=\frac{2}{5}.$$

三、总结

以上，我们对一元函数求极限进行了研究和总结，当然对于一元函数求极限含有很多别的方法，例如：运用换元法，夹逼准则，拉格朗日中值定理等方法，在这里本文仅仅总结了一些常用的方法. 在面对一元函数求极限时有时会多个方法并用，这就要求我们对所学知识点有灵活的运用.

参考文献

[1]同济大学数学系. 高等数学. 第7版[M]. 高等教育出版社，2014.

[2]毛北行，王东晓，MAO，等. 一元函数求极限的若干问题再讨论[J]. 玉溪师范学院学报，2016（12）：4.

[3]杨芳. 浅析一元函数极限解法[J]. 现代计算机，2013（15）：3.

[4]欧阳光中. 数学分析[M]. 上海：复旦大学出版社，2002.

[5]赵冬. 一元函数极限的求法[J]. 淮北职业技术学院学报，2007（05）：2.

作者简介：

邵明月（1993—），女，河南省商丘市人，所在院校：商丘工学院，职称：助教，　学历：硕士，研究方向：传染病动力学；

李晨（1987—），女，河南省商丘市人，所在院校：商丘工学院，讲师，硕士，研究方向：数理统计。