一题多解培养学生的发散性思维能力

严青
长沙市怡雅中学

[摘　要]一题多解是从不同的角度，不同的方位审视、分析同一题中的数量关系，用不同的解法求得相同结果的思维过程。一题多解在数学教学中能够增加数学问题的使用价值，也能够同时培养和训练学生的发散性思维，开阔学生的思路，提升学生知识之间灵活应用的能力，及时反思，使学生通过对比找寻不同方法之间的差异性和适用性，并且能够激发学生的好奇心，在探索多种方法的过程中选择出最简单的方法解决教学问题。

[关键词]一题多解；发散性思维；数学教学；解题方法
【DOI】10.12252/j.issn.2096-6288.2021.09.176

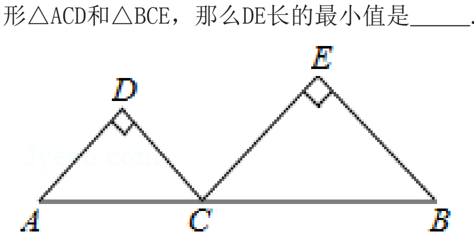
数学是初中阶段的一门必修课，要求学生在在学习过程中掌握一定的数理知识的同时，还能形成一定的推理、思维能力。另外，相对于物理化学的新奇感和生活化，数学对一部分学生而言就略显枯燥了，如何擦出学生思维的火花，享受思考过程中的乐趣，是作为一个教者需要深思，并不懈努力的过程。而发展学生的多元化思维，就是让学生感受各种乐趣的一种方法。

新的数学教学大纲也提出了“发展思维能力是数学教学的核心”，因此，作为一名初中数学老师，在教学之中向学生传授基础的数学知识的同时，更重要的还是着力发展学生的思维能力。尤其是在“以学生为本”的教学理念的指导下，教师作为课堂主导者，应该将课堂作为培养学生多元化思维、和创新性思维的主阵地，将多元化思维的发掘和培养贯穿到整个教学环节。

进入总复习，本人在教学中与学生碰撞出的思维火花，常常将课堂的气氛推向高潮，既让学生在多元化的思维中获得启迪，也让学生积极参与到思考中来，更让一部分平常不易受到关注或者表扬，让原本平实而枯燥的复习课也充满了生气。而这种碰撞，也让作为教学引导者的我受益匪浅。

以下本人就在二次函数的应用的中考复习课上，讲解一道练习题的过程中与学生们在交流中碰撞出的思维的火花，分享一下本人的一些感悟。

[原题]（2012江苏扬州中考题）如图，线段AB的长为2，C为AB上一个动点，分别以AC、BC为斜边在AB的同侧作两个等腰直角三角形△ACD和△BCE，那么DE长的最小值是_____.



（图1）

[答案]1。

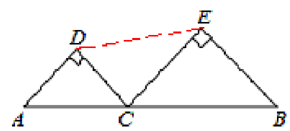
[考点]动点问题，等腰直角三角形的性质，平角定义，勾股定理，二次函数的最值等。

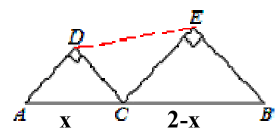
这是二次函数复习练习中出现的一道习题，基础较好的学生还是能够也利用相应的数量关系表示出了DE²，但却因为未知数选择的不同——[解法一]与[解法二]——而使问题变得不一样，但眼见涉及的运算量较大便有些生畏了。然而，究竟就这个问题是以常规思路带过，还是让学生经历探究，体会数学的思想和方法及一题多解的别样空间呢？

经过思考，我选择了后者。而这也让我在本堂课中与学生共同反思，在学生上台交流思路的同时，也启发了我，经过整理，确实受益匪浅。

一、一题多解思路解析

[解法一]（常规思路）（如图1-1-1）——此为大部分学生的思路





（图1-1-1）　　（图1-1-2）

如图1-1-2，连接DE，设AC＝x，则BC＝2－x，

∵△ACD和△BCE都是等腰直角三角形，

∴∠DCA＝45°，∠ECB＝45°，DC＝$\frac{\sqrt{2}}{2}x$，CE＝$\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$。∴∠DCE＝90°。

∴$DE^2=DC^2+CE^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)\right]^2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$。

∴当x＝1时，DE^2取得最小值，DE也取得最小值，最小值为1。

解法一是此类问题的常规思路，运用化归的思想方法，将求DE的最小的问题，转化到三角形之中，联系△CDE的特殊性：△CDE为直角三角形，要DE的长度表示出来，即利用勾股定理表示DE²，并求出最小值。

当然，教育的本质在于启迪思维：此时，个别学生对此也提出了不同的做法：

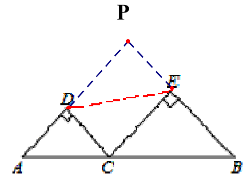
[解法二]（学生甲提出）（图1-2-1）

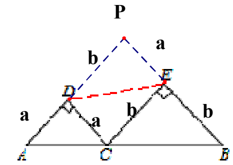
解：如图1-2-2，延长AD、BE，交与点P。

易得四边形PDCE为矩形，△PAB为等腰直角三角形：

设AD=DC=a，CE=BE=b，则DP=b，所以$a+b=\sqrt{2}$，

∴Rt△CDE中$DE^2=a^2+\left(\sqrt{2}-a\right)^2=2a^2-2\sqrt{2}a+2=2\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1$，∴当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$DE^2$取得最小值，最小值为1，DE也取得最小值，最小值为1。





（图1-2-1）　　（图1-2-2）

在此之前，我也这么设未知数，差别在于却并未将图形进行补全，只是直接利用a，b的关系来求解，看到这个学生的做法，让我不甚欢喜，因为他看出了这个图形的特殊性，并能以此转化数量关系。自然赢得了学生们的认可。

而另一方面，在看到学生如此补全图形的瞬间，我的心中却像有什么提起来的感觉，沉甸甸的，但却很欣喜……

当然，这种欣喜必须要分享：在学生们没有进一步的提出问题之后，我开始层层引入：同学们，这位同学的做法好在哪里呢？他的想法哪部分是值得我们学习的呢？

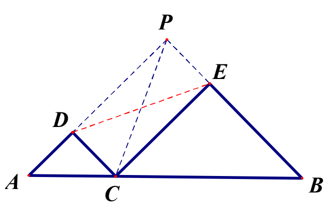
一段交流和引导之后，我们发现，这种方法的好处就在于：这位同学看到这个图形的特殊之处，并且将图形补全得到一个非常特殊的三角形：等腰直角三角形，将一个原本的动点问题转化到一个固定的等腰直角△PDE中，得到PD=PB=$\sqrt{2}$的数量关系，并能够很快的抓住图中PD=CF，CD=PE的特点，得到CD+CE=$\sqrt{2}$的确切的数量关系，表示出DE^2，进而求解。

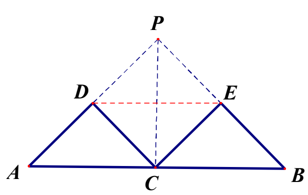
那么我们还发现，在刚刚这位同学的分析中，还有一个比较特殊的结论：四边形PDCE为矩形，我们可以从中得到什么启示呢？

（提示：矩形的对角线有什么特殊性？有几个反应快的学生恍然大悟。）

至此，我们得到了[解法三]。

[解法三]如图1-3-1，在[解法二]的基础上连接PC，则矩形PDCE中DE=PC，





（图1-3-1）　（图1-3-2）

则当PC取最小值时，也就是DE取最小值。

又由[解法二]，P是定点，C是AB边上的动点，当且仅当PC⊥AB时，PC取得最小值1，（垂线段最短）如图1-3-2。

也就是说：C点取得AB中点时，DE有最小值。

此法一出，为之前复杂的数量关系转化头疼的学生不禁叫绝。

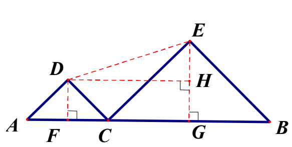
接下来，我们又逐步探讨出了其余的两种思路：

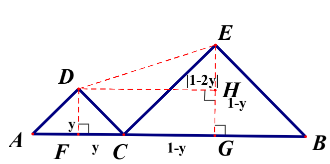
[解法四]

如图1-4-1，连接DE，作DF⊥AC于F，作FG⊥AB于G，不妨设EG＞DF，作DH⊥EG于H。

依题意易得：DF=FC=AC/2，EG=CG=CB/2，且DF+EG=FC+CG=AB/2=1，

所以，设DF=y，则EG=1-y，EH=1-2y。（如图1-4-2），依题意：





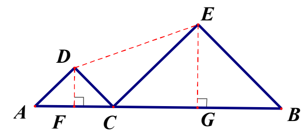
（图1-4-1）　（图1-4-2）

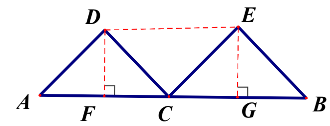
$DE^2=1^2+(1-y)^2=y^2-2y+2=(y-1)^2+1\geq 1$

∴当且仅当y=1时，DE^2的最小值是1，即DE的最小值是1。

（此法，是某位学生在构造直角三角形求解的过程中发现的另一种构造办法，能够想到此处，并且将方法一、二中较大的计算量变得简单而直观。）

[解法五]





（图1-5-1）　（图1-5-2）

抓住[解法四]中的特殊的数量关系，我们发现，作为等腰三角形的△ADC以及△CEB，底边上的高线DF，EG，也是底边上的中线，不论动点C的位置如何，都有FG=FC+CG=AB/2=1，（如图1-5-1）

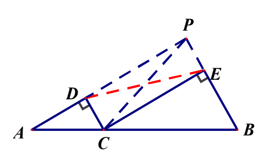
即不论动点C在何处，平行线DF与EG的距离保持不变，为1。

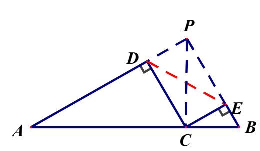
线段DE的长度即转化为两平行线上两点D、E的距离，当且仅当DE⊥DF时最小值为1，（如上图所示1-5-2）。故DE长的最小值是1

当然，学以致用，为检验学生不同方法的理解，举一反三很重要。针对这个问题，进行了如下的变式训练，以提升所学，并进一步将几种不同的方法一般化。

二、举一反三变式推广

[变式1-1]如图2-1-1，线段AB的长为2，C为AB上一个动点，分别以AC、BC为斜边在AB的同侧作两个直角三角形△ACD和△BCE，且∠A=∠ECB=30°，那么DE长的最小值是_______.[答案]$\frac{\sqrt{3}}{2}$





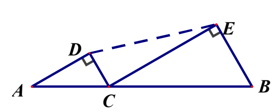
（图2-1-1）　（图2-1-2）

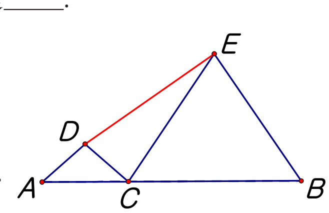
（快速解答：适用于[解法三]，能够快速的到结果。解题图示如图2-1-1及2-1-2）

[变式1-2]如图2-1，线段AB的长为c，C为AB上一个动点，分别以AC、BC为斜边在AB的同侧作两个直角三角形△ACD和△BCE，且∠A=∠ECB，sin∠A=$\frac{a}{c}$，那么DE长的最小值是_______.[答案]$\frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}$

（快速解答：适用于[解法三]，能够快速的到结果。解题图示如图2-1-1及2-1-2）

[变式2-1]如图，线段AB的长为2，C为AB上一个动点，分别以AC、BC为底边在AB的同侧作两个等腰三角形△ACD和△BCE，那么DE长的最小值是______.

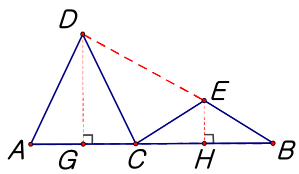




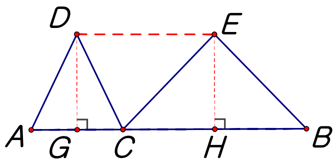
（图2-1）　（图2-2）

[答案]1。

（快速解答：适用于[解法五]，能够快速的到结果。解题图示如图2-2-1及2-2-2）



（图2-2-1）

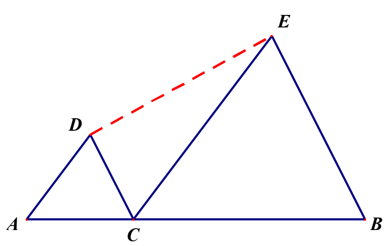


（图2-2-2）

[变式2-2]如图2-2，线段AB的长为x，C为AB上一个动点，分别以AC、BC为底边在AB的同侧作两个等腰三角形△ACD和△BCE，那么DE长的最小值是_____.[答案]x/2。

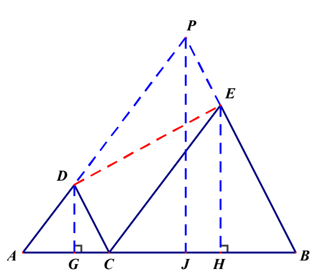
（快速解答：用于[解法五]，能够快速的到结果。解题图示如图2-2-1及2-2-2）

[变式3]如图，线段AB的长为5，C为AB上一个动点，在AB的同侧作△ACD和△BCE，且满足∠DAB=∠ECB，∠DCA=∠EBA，且 $\sin A=\frac{4}{5}$，$\tan B=\frac{1}{2}$，那么DE长的最小值是_____.[答案]$\frac{4\sqrt{65}}{13}$

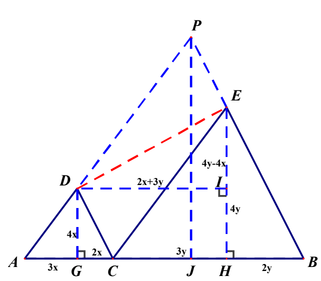


（图2-3）

（简易解答：适用于[解法四]，如下图2-3-1，依题意，根据三角形相似，设PJ=4a，则AJ=3a，JB=2a，又AB=3a+2a=5，解得AJ=3，JB=2。如图2-2-2，设DG=4x，EH=4y，则GC=2x，CH=3y，则，AB=5x+5y=5，即x+y=1，DI=GH=2x+3y，EI=4y-4x，则



（图2-3-1）



（图2-3-2）

$$DE^2=(2x+3y)^2+(4y-4x)^2=(3-x)^2+16(1-2x)^2$$
$$=65x^2-70x+25=65\left(x-\frac{7}{13}\right)^2+25-\frac{5\times 49}{13}\geq\frac{80}{13},$$

∴DE的最小值为$\frac{4\sqrt{65}}{13}$）

三、综述

本题是初三二次函数复习课中配套练习中的一道习题，作为常规思路的[解法一]和[解法二]是必定会讲的办法，而作为[解法五]也是在琢磨题意之后，得到的方法。而幸得一贯来鼓励学生交流方法的惯例，在[解法二]中学生添加的辅助线的灵感中，让我得到了启发，进而引导学生得出了[解法三]，也具有一定的可操作性，节省了计算量。而这类问题的生成让我欣喜——未曾埋没一个好的方法。这也让我更深刻的意识到：教学应该是以学生的动机和需要为中心展开的。教学是师生共同决定学习内容、建构知识的过程，是挖掘、拓展素材内涵的过程，是开发、创生课程的过程。只有这样才能使师生的主体性与生命力的张扬、发展成为一个统一的过程。

同时，在一题多解中要着重从以下几个方面注重培养学生的发散思维能力。

1、要注意培养创新思维。根据现代心理学的观点，一个人创造能力的大小，一般来说与他的发散思维能力是成正比例的。在教学中，要通过一题多解、一题多变、一题多思等培养学生的创新思维能力。

2、要注意诱发学生的灵感。灵感是一种直觉思维，是由于长期实践，不断积累经验和知识而突然产生的富有创造性的思路，是认识上质的飞跃。灵感的发生往往伴随着突破和创新。

3、教师应当充分地鼓励学生发现问题、提出问题、讨论问题、解决问题，通过质疑、解疑，让学生具备创新思维、创新个性、创新能力。而不论什么时候，我们都应当尊重学生的质疑，鼓励他们的发现，肯定他们的创新。这也是不断激励和激发他们大胆创新，积极思考的原动力。

4、发散性思维需要交流的平台：数学教学应该建立在学生自身经验、兴趣与动机的基础上，而不是老师一味地讲，学生一味地模仿、接受，我们要让学生们自己来发现问题、认识问题、探索并有效地解决问题，并为他们提供互相交流的平台，让他们在“做中学，学中做”的过程中不断成长。换一种姿态来与学生交流，用一种全新的授课方式走进课堂，让学生真正体会到学数学乐趣！

5、发散性思维的培养应该建立在培养学生独立思考的习惯的基础上。

结束语

数学课堂的本身，便是以学生为本，激发学生的内驱力，和积极激发学生思考的原动力。而本堂课的设计，旨在通过一题多解激发学生的发散性思维和创新性思维。本人作为执教者，亦深切的感受到教学相长的妙处，未来的教育之路还很长，坚持以学生为本，激发学生的积极性和培养学生的发散性思维，是我将继续秉承的理念。路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

参考文献

[1]王建.在一题多解中培养数学思维的广阔性[J].数学学习与研究，2010（04）：30.

[2]刘晓旭.巧用“一题多解”渗透数学核心素养[J].数学学习与研究，2017（03）：135.

[3]黄璧.聚焦一题多解 展现多彩思维[J].中学教学参考，2021（32）：31-32.